

1 行列とその演算

定義 1. 自然数 m と n において、 $m \times n$ 個の実数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) を次のように長方形に並べて () または [] で括ったものは $m \times n$ 行列または $m \times n$ 型の行列 (m -by- n matrix or matrix of dimension m -by- n) と呼ばれる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この a_{ij} は行列の (i, j) 成分 ((i, j) th entry) と呼ばれる。行列 A の成分の横のならば

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$$

は、 A の第 i 行 (i th row) と呼ばれ、 A の成分の縦のならば

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

は、 A の第 j 列 (j th column) と呼ばれる。

注 2. $1 \times n$ 行列は、 n 次の行ベクトル (n -dimensional row vector) と呼ばれ、 $m \times 1$ 行列は m 次の列ベクトル (m -dimensional column vector) と呼ばれる。

例 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ は 2×3 行列、 $(1 \ 0 \ 3 \ 2)$ は 4 次の行ベクトル、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ は 3 次の列ベクトルである。

定義 4. (i) 全ての成分が 0 であるような $m \times n$ 行列は、 $m \times n$ 零行列 ($m \times n$ zero matrix) と呼ばれ、 $O_{m,n}$ または単に O と書かれる。

(ii) $n \times n$ 行列は n 次の正方行列 (square matrix of order n) と呼ばれる。

- (iii) n 次の正方行列 A において、成分 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ は、 A の対角成分 (diagonal entries) と呼ばれる。
- (iv) 対角成分以外の成分が全て 0 である n 次の正方行列は、 n 次の対角行列 (diagonal matrix of order n) と呼ばれる。
- (v) 対角成分が全て 1 である n 次の対角行列は、 n 次の単位行列 (identity matrix) と呼ばれ、 E_n または単に E と書かれる。
- (vi) 行列 A の行と列を入れ替えた行列は、行列 A の転置行列 (transpose) と呼ばれ、 tA と書かれる。成分で書くと

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

注 5. (i) 行列 A は $m \times n$ 型の行列のとき、転置行列 tA が $n \times m$ 型の行列である。

- (ii) 行列 A の転置行列 tA の転置行列 ${}^t({}^tA)$ は、元の行列 A に戻る。すなわち、 ${}^t({}^tA) = A$ である。

例 6. (i) $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の正方行列である。

- (iii) 以上の正方行列 A の対角成分は $2, -2, 1$ である。

(iv) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は 3 次の対角行列、対角成分は $1, -1, 2$ である。

$$(v) \ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

$$(vi) \ {}^tO_{2,3} = O_{3,2}, \ {}^tE_n = E_n$$

$$(vii) \text{ 以上の行列 } A \text{ と } B \text{ に対して、} {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ {}^tB = B \text{ である。}$$

定義 7. (i) 同じ $m \times n$ 型の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

の**和** (sum) は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(ii) スカラー $s \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の**スカラー積** (scalar product) は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

注 8. (i) 型は異なる行列の和は定義されていない。

(ii) スカラー積 $(-1)A$ は、単に $-A$ とも書かれる。

(iii) $m \times n$ 行列 A と $-B$ の和は、単に $A - B$ とも書かれ、 A と B の差 (difference) と呼ばれる。

命題 9. $m \times n$ 行列 A, B, C において、次の性質が成立する。

(i) (和の結合律) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) (和の交換法則) $A + B = B + A$

(iii) $A + O = A = O + A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A において、次の性質が成立する。

(iv) $(st)A = s(tA)$

(v) $0A = O, 1A = A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A, B において、次の性質が成立する。

(vi) (分配法則) $s(A + B) = sA + sB$

(vii) (分配法則) $(s + t)A = sA + tA$

証明. 定義からすぐ成り立つ。

□

例 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} A - 2B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

定義 11. $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B の積 (matrix product) は、次のように定義される $m \times p$ 行列 AB である。 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

とし、 $i = 1, 2, \dots, m$ と $j = 1, 2, \dots, p$ に対して、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

である。

注 12. 定義 11 における c_{ij} は “ A の第 i 行掛ける B の第 j 列” であることを考えればよい。

例 13. 2×3 行列 A と 3×4 行列 B をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると、積 AB は次の 2×4 行列となる。

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

以上の行列 A と B に対して、積 BA は定義されていない。

注 14. n 次の正方行列 A と B に対して、 AB と BA は、両方定義されているが、一般的に AB と BA は異なる。例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

命題 15. $m \times n$ 行列 A 、 $n \times p$ 行列 B 、 $p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(i) (積の結合律) $A(BC) = (AB)C$

(ii) $AE_n = A$ 、 $E_m A = A$

スカラー $s \in \mathbb{R}$ 、 $m \times n$ 行列 A 、 $n \times p$ 行列 B において、次の性質が成り立つ。

(iii) $(sA)B = s(AB) = A(sB)$

$m \times n$ 行列 A 、 $n \times p$ 行列 B と B' 、 $p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(iv) (分配法則) $A(B + B') = AB + AB'$

(v) (分配法則) $(B + B')C = BC + B'C$

証明. 積の結合律 (i) を示すために、定義 11 を思い出す。 BC の (u, k) 成分は、

$$\sum_{v=1}^p b_{uv} c_{vk}$$

であるため、 $A(BC)$ の (i, k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{u=1}^n a_{iu} \left(\sum_{v=1}^p b_{uv} c_{vk} \right) = \sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^p a_{iu} b_{uv} c_{vk}$$

同様に、 AB の (i, v) 成分は、

$$\sum_{u=1}^n a_{iu} b_{uv}$$

であるため、 $(AB)C$ の (i, k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{v=1}^p \left(\sum_{u=1}^n a_{iu} b_{uv} \right) c_{vk} = \sum_{v=1}^p \sum_{u=1}^n a_{iu} b_{uv} c_{vk}$$

$A(BC)$ と $(AB)C$ の各成分は等しいことを示したため、

$$A(BC) = (AB)C$$

が成り立つ。他の性質 (ii)–(v) は簡単に証明される。 □

注 16. A は正方行列なら、 A を n 回掛けた行列 A^n が定義された。

例 17. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

例 18. n 次の正方行列 A と B に対して、

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &\stackrel{(iv)}{=} (A+B)A + (A+B)B \\ &\stackrel{(v)}{=} A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned}$$

である。

定義 19. $m \times n$ 行列のなす集合は、 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書かれる。

注 20. (i) n 次の正方行列のなす集合 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ は、単に $M_n(\mathbb{R})$ と書かれる。

(ii) n 次の列ベクトルのなす集合 $M_{n,1}(\mathbb{R})$ は、単に $\mathbb{R}^n$ と書かれる。