11　線形写像

定義 **1.** ベクトル空間 U, V において、次の性質を満たす写像 $F\colon U \to V$ は、線形写像と呼ばれる。

(1) 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ に対して、$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)$ である。

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in U$ に対して、$F(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u})$ である。

補題 **2.** 線形写像 $F\colon U \to V$ について、任意の 1 次結合 $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ に対して、

$$F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_nF(\mathbf{u}_n)$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$n = 0$ のとき、

$$F(\mathbf{0}) = F(0 \cdot \mathbf{0}) \overset{(2)}{=} 0 \cdot F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ。よって、$n = k - 1$ のときを正しいと仮定し、$n = k$ のときを示せばよい。このとき、

$$\begin{aligned} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k) &= F((c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + c_k\mathbf{u}_k) \\ &\overset{(1)}{=} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + F(c_k\mathbf{u}_k) \\ &\overset{(2)}{=} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + c_kF(\mathbf{u}_k) \\ &= c_1F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_{k-1}F(\mathbf{u}_{k-1}) + c_kF(\mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

が分かる。最後の等式は帰納法の仮定から成り立つ。これで、補題を示した。 □

補題 **3.** 線形写像 $F\colon U \to V$ と $G\colon V \to W$ に対して、合成写像

$$G \circ F\colon U \to W$$

も線形写像である。

授業ノート等：`www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_W`

証明. 合成写像 $G \circ F$ が、定義 1 の性質 (1)–(2) を満たすことを示す。

$$G(F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) = G(F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)) = G(F(\mathbf{u}_1) + G(F(\mathbf{u}_2))$$
$$G(F(c\mathbf{u})) = G(uF(\mathbf{u})) = uG(F(\mathbf{u}))$$

ここで、F が線形写像であるため、左辺の等式が成り立ち、G が線形写像であるため、右辺の等式が成り立つ。 □

定義 **4.** U、V を有限次元ベクトル空間、$F\colon U \to V$ を線形写像と

$$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$

を基底とする。このとき、

$$F(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{v}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

で決定された $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

は、$F\colon U \to V$ の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列と呼ばれる。

注 5. $F\colon U \to V$ の基底 $R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$ と $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ に関する表現行列では、第 j 列の成分は、$F(\mathbf{u}_j)$ の基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ に関する座標である。

次の命題により、有限次元 n, m のベクトル空間 U, V に対して、基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ が決められたとき、線形写像 $F\colon U \to V$ と $m \times n$ 行列が、一対一対応する。

命題 **6.** U, V を有限次元ベクトル空間、

$$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$

をそれぞれの基底、$F\colon U \to V$ を線形写像、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を $F\colon U \to V$ の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、$\mathbf{x} \in U$ とその像 $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$ を

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots x_n\mathbf{u}_n$$

$$F(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots y_m\mathbf{v}_m$$

で表すと、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

である。

証明. 次のような計算から、命題が成り立つ。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) \\ &= x_1F(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_nF(\mathbf{u}_n) \\ &= x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{v}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

ここでの最初の三つの等式は、それぞれ、基底 R に関する $\mathbf{x}$ の座標の定義、補題 2、基底 R と S に関する F の表現行列の定義から成り立つ。 □

例 7. U を次のベクトル空間とする。

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$R \subset U$ を、次のようなベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ からなる基底とする。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F\colon U \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、$F\colon U \to \mathbb{R}^2$ の基底 $R \subset U$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。なぜなる、

$$F(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$$
$$F(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$$

ため、定義 4 から得る。

命題 **8.** U, V, W を有限次元ベクトル空間、

$$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$
$$T = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\} \subset W$$

をそれぞれの基底、$F\colon U \to V$ と $G\colon V \to W$ を線形写像、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ $F\colon U \to V$ の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列と $G\colon V \to W$ の基底 $S \subset V$ と $T \subset W$ に関する表現行列とする。このとき、合成写像 $G \circ F\colon U \to W$ の基底 $R \subset U$ と $T \subset W$ に関する表現行列は、BA である。

証明. $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$, $\mathbf{z} = (G \circ F)(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}) \in W$ を、それぞれ

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_m\mathbf{v}_m$$
$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{w}_1 + \cdots + z_k\mathbf{z}_k$$

で表しておく。このとき、命題 8 より、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

ため、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が分かる。よって、$G \circ F$ の基底 $R \subset U$ と $T \subset W$ に関する表現行列は、BA であることが分かる。 $\square$

注 9. 次の図式を考えると、命題 8 が覚えやすい。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & V \arrow[r, "G"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dotted, "A"] \arrow[rr, dotted, bend right, "BA"'] & S \arrow[r, dotted, "B"] & T \end{tikzcd}$$