12　核と像

定義 **1.** 線形写像 $F\colon U \to V$ において、次のように定義された部分集合 $\ker(F) \subset U$ と $\mathrm{im}(F) \subset V$ は、それぞれ F の核と F の像と呼ばれる。

$$\ker(F) = \{\mathbf{u} \in U \mid F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \subset U$$
$$\mathrm{im}(F) = \{F(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\} \subset V$$

例 2. (1) 恒等写像 $\mathrm{id}_U\colon U \to U$, $\mathrm{id}_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, に対して、

$$\ker(\mathrm{id}_U) = \{\mathbf{u} \in U \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$
$$\mathrm{im}(\mathrm{id}_U) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\} = U$$

である。

(2) ゼロ写像 $\mathbf{0}\colon U \to V$, $\mathbf{0}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, に対して、

$$\ker(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in U \mid \mathbf{0} = \mathbf{0}\} = U$$
$$\mathrm{im}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0} \mid \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{0}\}$$

である。

補題 **3.** 線形写像 $F\colon U \to V$ に対して、$\ker(F) \subset U$ と $\mathrm{im}(F) \subset V$ は、部分空間である。

証明. 以下、$\mathrm{im}(F) \subset V$ は部分空間であることを示す。$\ker(F) \subset U$ は部分空間であることは、同様に示される。

(i) $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ため、$\mathbf{0} \in \mathrm{im}(F)$ が分かる。

(ii) $\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_2) \in \mathrm{im}(F)$ のとき、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v_2} = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in \mathrm{im}(F)$$

が成り立つ。

(iii) $\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$ と $a \in \mathbb{R}$ のとき、

$$a\mathbf{v} = aF(\mathbf{u}) = F(a\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$$

が得られる。 □

授業ノート等：www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_W

写像 $F\colon U \to V$ について概念を復習する。任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ に対して、$F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2)$ が成り立つならば必ず $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ が成り立つとき、$F\colon U \to V$ は単射と呼ばれる。任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して、$F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ を満たす $\mathbf{u} \in U$ が存在するとき、$F\colon U \to V$ は全射と呼ばれる。全射であるかつ単射であるような写像 $F\colon U \to V$ は、全単射と呼ばれる。明らかに、$F\colon U \to V$ が全射であることと $\mathrm{im}(F) = V$ であることは同値である。

補題 **4.** 線形写像 $F\colon U \to V$ に対して、次の性質 (i) と (ii) は同値である。

(i) $\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ である。

(ii) $F\colon U \to V$ は単射である。

証明. 「(ii)$\Rightarrow$(i)」は自明なので、「(i)$\Rightarrow$(ii)」を示す。$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ を、$F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2)$ 満たすとき、$F(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) - F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ ため、$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \ker(F)$ が分かる。(i) より、$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ が分かるため、$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ を得る。よって、F は単射であることを示した。 □

定義 **5.** 有限次元ベクトル空間 U と V、線形写像 $F\colon U \to V$ において、$\ker(F)$ と $\mathrm{im}(F)$ の次元は、それぞれ F の退化次数と F の階数と呼ばれ、

$$\mathrm{null}(F) = \dim(\ker(F))$$
$$\mathrm{rank}(F) = \dim(\mathrm{im}(F))$$

と書かれる。

補題 **6.** A を、$m \times n$ 行列、$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める線形写像とすると、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A)$$

である。

証明. 像の定義より、$\mathrm{im}(F) \subset \mathbb{R}^m$ は、A の列ベクトルで生成される部分空間である。

まず、A は、簡約な行列であることを仮定する。このとき、$\mathrm{rank}(A)$ は、A の主成分の個数と定義された。一方、主成分を含む列ベクトルのなす部分集合 $S = \{\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}\} \subset \mathrm{im}(F)$ は、$\mathrm{im}(F)$ の基底である。なぜなら、A が簡約な行列であるため、S は 1 次独立で、主成分を含まない列ベクトルが、主成分を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることが分かる。よって、A は、簡約な行列であるとき、$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A)$ が成り立つ。

次に、A を、任意の $m \times n$ 行列とし、B を、A の簡約化とする。階数の定義より、

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$$

が分かる。さらに、$B = CA$ を満たす可逆な $m \times m$ 行列 C が存在する。$G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を、$G(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}$ で定める線形写像とすると、

$$(G \circ F)(\mathbf{x}) = CA\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

ため、$\operatorname{rank}(G \circ F) = \operatorname{rank}(B)$ が分かる。よって、$\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(G \circ F)$ を示せばよい。今、C は、可逆であるため、$G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は、全単射で、$G^{-1}(\mathbf{z}) = C^{-1}\mathbf{z}$ であることが分かる。よって、$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\} \subset \operatorname{im}(F)$ は基底であるとき、$G(S) = \{G(\mathbf{y}_1), \ldots, G(\mathbf{y}_r)\} \subset \operatorname{im}(G \circ F)$ も基底であることが成り立つ。同様に、$T = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s\} \subset \operatorname{im}(G \circ F)$ は基底であるとき、$G^{-1}(T) = \{G^{-1}(\mathbf{z}_1), \ldots, G^{-1}(\mathbf{z}_s)\} \subset \operatorname{im}(F)$ も基底であることが分かる。特に、$r = s$ であるため、

$$\operatorname{rank}(F) = \dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(\operatorname{im}(G \circ F)) = \operatorname{rank}(G \circ F)$$

が成り立つ。これで、補題をしめした。 □

命題 7. U と V を、有限次元ベクトル空間、$F\colon U \to V$ を、線形写像、$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$、$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ を、基底、A を、F の R と S に関する表現行列とする。このとき、

$$\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(A)$$

である。

証明. $G\colon \mathbb{R}^n \to U$ と $H\colon \mathbb{R}^m \to V$ を、次のように定める線形写像とする。

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \qquad H\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_m\mathbf{v}_m$$

このとき、G と H は全単射で、$(H^{-1} \circ F \circ G)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ であるため、補題 6 より、

$$\operatorname{rank}(H^{-1} \circ F \circ G) = \operatorname{rank}(A)$$

であることが分かる。さらに、G と H は全単射なので、補題 6 の証明と同じように、

$$\operatorname{rank}(H^{-1} \circ F \circ G) = \operatorname{rank}(F \circ G) = \operatorname{rank}(F)$$

が示される。よって、$\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(A)$ が成り立つ。 □

定理 8. 有限次元ベクトル空間 U と V、線形写像 $F\colon U \to V$ に対して、

$$\mathrm{null}(F) + \mathrm{rank}(F) = \dim(U)$$

である。

証明. $r = \mathrm{null}(F)$, $s = \mathrm{rank}(F)$ とおき、$\ker(F)$ と $\mathrm{im}(F)$ の基底

$$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset \ker(F)$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\} \subset \mathrm{im}(F)$$

を捕る。さらに、

$$F(\mathbf{u}_{r+1}) = \mathbf{v}_1, \quad F(\mathbf{u}_{r+2}) = \mathbf{v}_2, \quad \cdots F(\mathbf{u}_{r+s}) = \mathbf{v}_s$$

を満たす $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s} \in U$ を捕る。このとき、

$$T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s}\} \subset U$$

が、U の基底となることを示せばよい。

まず、T は U を生成することを示す。$\mathbf{u}$ を U の任意のベクトルとする。$F(\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$ ため、

$$F(\mathbf{u}) = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s \qquad (b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{R})$$

で表される。さて、

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s})) = F(\mathbf{u}) - (b_1F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + b_sF(\mathbf{u}_{r+s})) \\ &= b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s - (b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ため、$\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}) \in \ker(F)$ が分かる。ゆえに、

$$\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}) = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r \qquad (a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R})$$

で表される。よって、

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r + b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}$$

となるので、$T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s}\}$ は U を生成することを示した。

次に、T は 1 次独立であることを示す。 1 次結合

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r + b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s} = \mathbf{0}$$

が与えられたとき、F を両辺に施す。$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in \ker(F)$ ため、

$$b_1 F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + b_s F(\mathbf{u}_{r+s}) = \mathbf{0}$$

または同等

$$b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

を得る。今、$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ は 1 次独立であるため、$b_1 = 0, \dots, b_s = 0$ を得る。よって、

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

が分かる。しかし、$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset \ker(F)$ も 1 次独立であるため、$a_1 = 0, \dots, a_r = 0$ が成り立つ。これで、$T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+s}\}$ は 1 次独立であることを示した。 □

例題 9. $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

(i) F の退化次数と階数を求めよ。

(ii) $\ker(F)$ の基底 R、$\mathrm{im}(F)$ の基底 S を求めよ。

解答. (i) A の簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、$\mathrm{rank}(A) = 2$ が分かる。今、補題 6 より、$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = 2$、定理 8 より、$\mathrm{null}(F) = 4 - \mathrm{rank}(F) = 2$ が成り立つ。

(ii) まず、$\ker(F)$ の基底 R を与える。

$$\ker(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ため、$\ker(F)$ は、次の連立 1 次方程式の解集合と等しい。

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

その解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

すなわち、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は、$\ker(F)$ の基底であることが分かる。

次に、$\mathrm{im}(F)$ の基底 S を与える。A を簡約した行列 B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルからなる部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(F)$$

は、$\mathrm{im}(F)$ の基底である。

以下、$S \subset \mathrm{im}(F)$ は基底である主張を示す。C を、$B = CA$ を満たす可逆な 3×3 行列、$G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$G(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}$ で定める線形写像とする。このとき、合成写像 $G \circ F \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ は、$(G \circ F)(\mathbf{x}) = CA\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ で表される線形写像である。$\mathrm{im}(G \circ F) \subset \mathbb{R}^3$ は、B の列ベクトルで生成された部分空間である。さらに、B が簡約な行列であるため、主成分を含む列ベクトルからなる部分集合

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(G \circ F)$$

は、基底であることが分かる。今、$G^{-1} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、$G^{-1}(\mathbf{z}) = C^{-1}\mathbf{z}$ で表され、

$$S = G^{-1}(T) \subset \mathrm{im}(F)$$

は、$\mathrm{im}(F)$ の基底であることが成り立つ。 $\square$