

5 可逆行列

以下、正方行列を考える。

定義 1. A を正方行列とする。

(1) $AC = E_n = CA$ を満たす正方行列 C は、 A の**逆行列**と呼ばれ、 A^{-1} と書かれる。

(2) A が逆行列を持つとき、**可逆行列**あるいは**正則行列**と呼ばれる。

注 2. (i) 可逆行列 A^{-1} は、一意である。なぜなら、 $AC = E_n = CA$ と $AD = E_n = DA$ のとき、

$$C = CE_n = C(AD) = (CA)D = E_n D = D$$

が成り立つ。

(ii) A と B は可逆行列であるとき、 AB も可逆行列で、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

定理 3. n 次正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) A は、可逆行列である。

(ii) $AC = E_n$ を満たす正方行列 C が存在する。

このとき、 $A^{-1} = C$ である。

証明. 授業 7 で示す。

□

補題 4. n 次正方行列 A に対して、次の性質は同値である。

(i) $AC = E_n$ を満たす n 次正方行列 C が存在する。

(ii) 任意の n 次列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持つ。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ とすると、

$$A\mathbf{x} = A(C\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = E_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

が成り立つ。

(ii) $\Rightarrow$ (i) : n 次列ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、仮定より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、解を持つ。それらを、各々 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1, \mathbf{x} = \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ とし、

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$$

とすると、 C は n 次正方行列で、

$$AC = A \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \dots & A\mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = E_n$$

を満たす。これで、補題を示した。 $\square$

命題 5. A を $\text{rank}(A) = n$ を満たす n 次正方行列とする。このとき、 $(E_n \mid C)$ を $n \times 2n$ 行列 $(A \mid E_n)$ を簡約化した行列とすると、 n 次正方行列 C は $AC = E_n$ を満たす。

証明. なぜなら、 C を $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ と書くと、任意の $j = 1, 2, \dots, n$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ の解集合は等しいため、 $AC = E_n$ が成り立つ。 $\square$

注 6. 定理 3 より、命題 5 に於ける n 次正方行列 C は、元の n 次正方行列 A の逆行列であることが分かる。すなわち、 $C = A^{-1}$ である。

例 7. 以下、注 6 で説明したように、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned} (A \mid E_3) &= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-3) \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-1) \end{array} \\ &\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & | & 3 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-1) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \times 3 \end{array} \\ &\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2 \\ \textcircled{3} + \textcircled{2} \times 7 \\ \textcircled{1} \times (-1) \end{array} \\ (E_3 \mid A^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} \times (-1) \end{array} \end{aligned}$$

よって、 $\text{rank}(A) = 3$ で、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

が分かる。

例 8. 同様に、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned} (A \mid E_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-3) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} && \textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} && \textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-2) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} && \textcircled{2} \times (1/2) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} && \textcircled{3} \times (-1/3) \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} && \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-1) \\ (E_3 \mid A^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 & -1/6 & 2/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} && \textcircled{1} + \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって、 $\text{rank}(A) = 3$ で、

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

が分かる。