

7 行列式の性質

帰納法を用い、 n 次の正方行列 A の行列式 $\det(A)$ を、次のように定義した。 $n = 1$ のとき、 $\det(A) = a_{11}$ で、 $n > 1$ のとき、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

である。ただし、 A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n - 1$ 次の正方行列である。

定理 1 (行列式の基本定理). 次の性質 (1)–(4) を満たす写像

$$\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1 \leq i \leq n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ 、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

である。

(2) 任意の $1 \leq i \leq n$ 、行ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ 、 $\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ s\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$\text{「 } \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j \quad \text{ならば} \quad \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0 \text{」}$$

である。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

この定理から、行列式の各性質が成り立つ。

系 2. n 次行列式に対して、次の性質が成り立つ。

(5) 任意の n 次正方行列 A と B に対して、

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$$

である。

(6) 任意の n 次正方行列 A に対して、

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

である。

(7) 任意の n 次正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

である。ここで、 A_{ij} は、 A から第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列である。

(8) B を、正方行列 A の第 i 行を s 倍した行列とすると、

$$\det(B) = s \det(A)$$

である。

(9) B を、正方行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列とすると、

$$\det(B) = -\det(A)$$

である。

(10) B を、正方行列 A の第 i 行に第 j 行 ($i \neq j$) の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(B) = \det(A)$$

である。

注 3. $A + A = 2A$ は、 A の各行を 2 倍とした行列であるため、(8) より、

$$\det(A + A) = \det(2A) = 2^n \det(A)$$

が分かる。よって、一般的に、

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

である。

任意の $i < j$ に対して、 $b_{ij} = 0$ であるような正方行列 B は、**上三角行列** と呼ばれる。 tB は上三角行列であるような正方行列 B は、**下三角行列** と呼ばれる。帰納法を用い、次の公式が、性質 (7) から成り立つ。

(11) 任意の**三角行列** B に対して、

$$\det(B) = b_{11}b_{22} \cdots b_{nn}$$

である。

例 4. 性質 (8)–(11) を用いて、行列式を計算してみる。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} && \text{① と ③ を入れ替えた} \\
 &= -3 \cdot (-5) \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -56 & 0 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{②} + \text{①} \times (-2) \\ \text{③} + \text{①} \times (-4) \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 28 \end{vmatrix} && \text{③} + \text{②} \times \left(-\frac{7}{3}\right) \\
 &= 2 \cdot (-24) \cdot 28 = -2^6 \cdot 3 \cdot 7 = -1344
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{②} + \text{①} \times (-1) \\ \text{③} + \text{①} \times (-1) \\ \text{④} + \text{①} \\ \text{⑤} + \text{①} \times (-1) \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} && \text{⑤} + \text{③} \times (-1) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{⑤} + \text{④} \times (-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \textcircled{5} + \textcircled{2} \times (-1) \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \textcircled{2} \text{ と } \textcircled{3} \text{ を入れ替え} \\
&= -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) = 2^4 = 16.
\end{aligned}$$

注 5. 系 2 その (6) より、その (8)–(10) と以下の (8')–(10') は同値である。

(8') 行列 C は、行列 A の第 j 列を s 倍した行列とすると、

$$\det(C) = s \det(A)$$

である。

(9') 行列 C は、行列 A の第 j 列と第 k 列を入れ替えた行列とすると、

$$\det(C) = -\det(A)$$

である。

(10') 行列 C は、行列 A の第 j 列に第 k 列 ($j \neq k$) の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(C) = \det(A)$$

である。

例 6. 性質 (8)–(10) と (8')–(10')、(11) を用いて、以下の行列式を計算してみる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と第 5 行を入れ替えた}$$

$$= + \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行と第 4 行を入れ替えた}$$

$$= - \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列と第 4 列を入れ替えた}$$

$$= -8 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 3$$

$$= 2^6 \cdot 3 = 192$$

行列式について、次の主な定理を示す。

定理 7. n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\text{rank}(A) = n$

(ii) $\det(A) \neq 0$

証明. A を簡約化した行列を B とする。系 2 その (8)–(10) より、 $\det(A) \neq 0$ と $\det(B) \neq 0$ は同値である。 B は三角行列であるため、(11) より、 $\det(B) \neq 0$ と $B = E_n$ は同値である。また、階数の定義より、 $B = E_n$ と $\text{rank}(A) = n$ は同値であるため、定理が成り立つ。 $\square$

定理 8 (クラメル公式). n 次の正則行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

において、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}$$

証明. $\mathbf{x}$ が連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることと列ベクトル $\mathbf{b}$ が次の 1 次結合で表されることは同値である。

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

従って、性質 (1')-(2') より、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

を得る。さらに、性質 (3') より、 $j = i$ 以外の項が消えているため、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = x_i \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

例 9. クラメル公式を用いて、次の連立 1 次方程式を問いでみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

まず、(8)-(11) より、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

を得る。同様に、次の行列式を計算する。

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 9$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

よって、クレーメルの公式より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 5/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

が分かる。しかし、掃き出し法の方が楽である。