数学通論 II・中間試験（解答）

問題 1 (20 点). 次のベクトル $\mathbf{b}$ がベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表されるとき、c を求めよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

解答 1. 連立 1 次方程式 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ の拡大係数行列 $(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列は、次のように得られる。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (c = -26); \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (c \neq -26)$$

よって、$c = -26$ のとき、ただ一つの解が存在し、$c \neq -26$ のとき、解が存在ない。

問題 2 (20 点). 次の連立 1 次方程式を掃き出し法（拡大係数行列の基本変形）によって解け。ただし、解答にはどのような基本変形を行ったかを明記すること。

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 - {}} 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \phantom{{} - 3x_4} = 1 \\ x_1 - 2x_2 \phantom{{} + 2x_3} + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解答 2. 連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(B \mid \mathbf{c})$ は、

$$(B \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ため、任意の解が次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

問題 3 (20 点). 任意の実数 a に対して、A を以下の行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$$

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) A を簡約化した行列 B を求めよ。ただし、解答にはどのような基本変形を行ったかを明記すること。

(2) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ。

解答 3. (1) A を簡約化した行列は、次のように表される。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a = 1); \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a \neq 1)$$

(2) $a = 1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 2$ で、$a \neq 1$ のとき $\mathrm{rank}(A) = 3$ である。

問題 4 (20 点). 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。ただし、掃き出し法を用いる場合は、解答にどのような基本変形を行ったかを明記すること。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

解答 4. $(A \mid E)$ を簡約化した行列は $(E \mid A^{-1})$ であることが分かるため、掃き出し法を用い、次の結果が成り立つ。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 5 (20 点). 次の行列 A と B に対して、行列式を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

解答 5.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ &= -4 \cdot (14 - 12) + 2 \cdot (7 - 18) \\ &= -8 - 22 \\ &= -30 \\ \det(B) &= -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -5 \cdot (-6) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -5 \cdot (-6) \cdot (5 - 4) \\ &= \quad 30 \end{aligned}$$