練習問題その１ (解答)

問題 1. (i) ◯

(ii) × 反例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 2. $(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B)$

$$= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$$

問題 3. 任意の自然数 n に対して、

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を示す。$n=1$ のときは正しいため、$n=r-1$ のときは正しいを仮定し、$n=r$ のときを示せばよい。

$$A^r = A \cdot A^{r-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & r-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4. $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) = E - A^n$

問題 5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は、方程式 $A^2 = A$ を満たす。

注 一般的に、$A^2 = A$ を満たす零行列でない 2 次の正方行列は、平面から平面の原点 O を通る直線 ℓ への射影写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と次のように対応する。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

ここで、直線 $\ell \subset \mathbb{R}^2$ は、写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の像である。