練習問題その１０ (解答)

問題 1. (i) $1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ii) $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(iii) $1 \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (-2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

問題 2. ある 1 次関係 $c_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + c_3(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ から、次のような 1 次関係が成り立つ。

$$(c_1 + c_3)\mathbf{u} + (c_1 + c_2)\mathbf{v} + (c_2 + c_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ は 1 次独立であるため、$c_1 + c_3 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$ であることが分かる。このとき、必ず $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ であるため、$S' = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$ は 1 次独立であることが示された。

問題 3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$ は基底で、$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$ は基底でもある。

問題 4. (i) $T \subset V$ は基底であるとき、$h = n$ が分かる。逆に、$T \subset V$ は基底でないとき、定理 7 より、T に含まれている基底 $B = \{\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}\} \subset V$ が存在することが分かる。よって、$n < h$ を得る。

(ii) $S \subset V$ は基底であるとき、$k = n$ が分かる。逆に、$S \subset V$ は基底でないとき、定理 7 より、S を含む基底 $B \subset V$ が存在することが分かる。よって、$k < n$ を得る。