練習問題その２ (解答)

問題 1. $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は n 次の列ベクトルなので、$n\times 1$ 型の行列である。よって、それぞれの転置行列 ${}^t\mathbf{a}$ と ${}^t\mathbf{b}$ は $1\times n$ 型の行列となる。一般的に、A は $m\times n$ 型の行列、B は $n\times p$ 行列のとき、AB は $m\times p$ 行列である。特に、次の答えが分かる。

(i) ${}^t\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ は 1×1 型の行列である。

(ii) $\mathbf{a}\,{}^t\mathbf{b}$ は $n\times n$ 型の行列である。

問題 2. 行列ベクトルへの分割と列ベクトルへの行列は、次のようになる。

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c:c:c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

行ベクトルへの分割　　　列ベクトルへの分割

問題 3. 行列 A を次のように分割しておく。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_2 & O_{2,3} \\ A_{21} & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$A^n=\begin{pmatrix} E_2 & O_{2,3} \\ nA_{21} & E_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 2n & 1 & 0 & 0 \\ n & 3n & 0 & 1 & 0 \\ 4n & 2n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

問題 4. (i) $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ の表現行列は、$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(ii) $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列は、$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(iii) $F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列は、

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

問題 5. 写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、空間の原点 O と $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で定義される点 P を通る直線 ℓ に関して $2\pi/3$ 回転させる線形写像である。