練習問題その６ (解答)

問題 1. (A) 第 1 行で展開すると、

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +4 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 15 = 60$$

を得る。

(B) 第 1 行で展開し、第 1 列で展開し、第 1 行で展開し、第 1 行で展開すると、

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-8) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & -2 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-8) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 = 192\end{aligned}$$

を得る。

(C–D) 同様に、$\det(C) = -19$ と $\det(D) = 600$ が分かる。

問題 2. $n = 1$ のとき、$\det(A) = a_{11}$ は自明なので、$n = r - 1$ のときは正しいと仮定し、$n = r$ のときを示せばよい。第 1 列で展開すると、$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$ が分かる。なぜなら、任意の $i > 1$ に対して、$a_{i1} = 0$ である。さらに、A_{11} は $r - 1$ 次の上三角行列であるため、帰納法の仮定より、$\det(A_{11}) = a_{22}a_{33} \ldots a_{rr}$ が分かる。よって、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{rr}$$

が成り立つ。

問題 3. $m=1$ のとき、第 1 列で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = a_{11}\det(D) = \det(A)\det(D)$$

を得るため、$m=r-1$ のときは正しいと仮定し、$m=r$ のときを示せばよい。B の第 i 行を除いた行列を B_i とし、第 1 列で展開すると、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}a_{i1}\det\begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、帰納法の仮定より、

$$\det\begin{pmatrix} A_{i1} & B_i \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A_{i1})\det(D)$$

が分かるため、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})\det(D) = \det(A)\det(D)$$

を得る。