練習問題その７ (解答)

問題 1. 行列 $E_n + E_n = 2E_n$ は三角行列なので、性質 (11) より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) = 2^n$$

が分かる。同情に、$2E_n$ は、E_n の各行を 2 倍とした行列であるため、性質 (2) より、

$$\det(E_n + E_n) = \det(2E_n) \overset{(2)}{=} 2^n \det(E_n) = 2^n$$

を得る。

問題 2. $T_{3,4}T_{1,2}P = E_4$ から $(-1)(-1)\det(P) = \det(E_4)$ が分かるため、$\det(P) = 1$ を得る。

$T_{1,2}T_{2,3}T_{3,4}Q = E_4$ から $(-1)(-1)(-1)\det(Q) = \det(E_4)$ ため、$\det(Q) = -1$ が分かる。

問題 3. $\boldsymbol{a} = (a_1 \ \ a_2 \ \ a_3)$、$\boldsymbol{b} = (b_1 \ \ b_2 \ \ b_3)$、$\boldsymbol{c} = (c_1 \ \ c_2 \ \ c_3)$ とすると、性質 (1) と (3) より、

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る。さらに、性質 (9) より、

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$$

が分かる。すなわち、

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$$

を示した。

問題 4. A は可逆のとき、$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ である。よって、性質 (5) と (4) より、

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

を得る。従って、$\det(A)$ はゼロでない、

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

が分かる。

問題 5. 性質 (5) と (4) より、

$$\det(A)^m = \det(A^m) = \det(E_n) = 1$$

を得る。$\det(A)$ は実数なので、$|\det(A)| = 1$ が分かる。

(A の成分は複素数のとき、どうになるのでしょうか？)