幾何学 II／幾何学概論 II：レポート問題その 1

11 月 11 日 17:00 までに理 1 号館 105 号室で出して下さい。

問題 **1.** (1) 次のように定める線形写像は、同型であることを示せ。

$$i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^3), \qquad i(w)(v) = \langle w, v\rangle$$
$$j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3), \qquad j(w)(v_1, v_2) = \det(w, v_1, v_2)$$

ここで、$\langle -, -\rangle$ は、$\mathbb{R}^3$ の標準内積である。

(2) 任意の $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$i(v_1) \wedge i(v_2) = j(v_1 \times v_2)$$

であることを示せ。ここで、$- \times -$ とは、$\mathbb{R}^3$ のクロス積である。

問題 **2.** 線形写像 $f\colon V \to W$ と交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(W)$、$\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(W)$ に対して、

$$\mathrm{Alt}^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{Alt}^p(f)(\omega_1) \wedge \mathrm{Alt}^q(f)(\omega_2)$$

を示せ。

問題 **3.** V を有限次元 n ベクトル空間、$\langle -, -\rangle$ をその内積、$\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ を正規直交基底とする。

(1) 次のように定める線形写像は同型であることを示せ。

$$i\colon V \to \mathrm{Alt}^1(V), \qquad i(v)(w) = \langle v, w\rangle$$

（ヒント：$i(b_j) = b_j^*$ を示せばよい。ここで、$\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^1(V)$ は反対基底である。）

与えられた V 上内積 $\langle -, -\rangle$ は、次のように定める $\mathrm{Alt}^p(V)$ 上内積 $\langle -, -\rangle_p$ を誘導する。

$$\Big\langle \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)}, \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda'_\sigma b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)} \Big\rangle_p = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma \lambda'_\sigma$$

誘導された内積 $\langle -, -\rangle_p$（$p \geqslant 1$）に対して、以下の性質 (2)–(3) を示せ。

(2) 任意の $v, w \in V$ に対して、

$$\langle i(v), i(w)\rangle_1 = \langle v, w\rangle$$

である。

(3) 任意の $\omega_1, \dots, \omega_p, \tau_1, \dots, \tau_p \in \mathrm{Alt}^1(V)$ に対して、

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_1, \tau_p \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_p, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_p, \tau_p \rangle_1 \end{pmatrix}$$

である。