幾何学 II / 幾何学概論 II：レポート問題 1 の答え

問題 1. (1) i と j は、$\mathbb{R}^3$ の基本基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を、$\mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^3)$ と $\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ のそれぞれの基底 $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ と $\{e_2^* \wedge e_3^*, -e_1^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_2^*\}$ に移すため、同形である。

(2) 両辺は、$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ に関する 2 次交代式であるため、以下の計算から成り立つ。

$$i(e_1) \wedge i(e_2) = e_1^* \wedge e_2^* = j(e_3) = j(e_1 \times e_2)$$
$$i(e_1) \wedge i(e_3) = e_1^* \wedge e_3^* = -j(e_2) = j(e_1 \times e_3)$$
$$i(e_2) \wedge i(e_3) = e_2^* \wedge e_3^* = j(e_1) = j(e_2 \times e_3)$$

問題 2. 任意の $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = (\omega_1 \wedge \omega_2)(f(v_1), \dots, f(v_{p+q})) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \omega_1(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(p)}))\, \omega_2(f(v_{\sigma(p+1)}), \dots, f(v_{\sigma(p+q)})) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \mathrm{Alt}^p(\omega_1)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})\, \mathrm{Alt}^q(\omega_2)(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (\mathrm{Alt}^p(\omega_1) \wedge \mathrm{Alt}^q(\omega_2))(v_1, \dots, v_{p+q})
\end{aligned}$$

ため、公式が成り立つ。

問題 3. (1) $i(b_i)(b_j) = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$ ため、$i(b_i) = b_i^*$ が分かる。従って、i は同形であることを得る。

(2) 両辺は、$v, w \in V$ に関する 2 重線形写像であるため、以下の計算から成り立つ。

$$\langle i(b_i), i(b_j) \rangle_1 = \langle b_i^*, b_j^* \rangle_1 = \delta_{i,j} = \langle b_i, b_j \rangle$$

(3) 両辺は、$\mathrm{Alt}^1(V)$ 上 $2p$ 重線形形式であるため、ω_i, τ_j を反対 基底に含んでいるベクトルとすればよい。このとき、それぞれの外積と行列式の性質より、

$$\langle b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_p}^*, b_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{j_p}^* \rangle_p = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}) \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \langle b_{i_1}^*, b_{j_1}^* \rangle_1 & \cdots & \langle b_{i_1}^*, b_{j_p}^* \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_{i_p}^*, b_{j_1}^* \rangle_1 & \cdots & \langle b_{i_p}^*, b_{j_p}^* \rangle_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}) \end{cases}$$

ため、示したい公式が成り立つ。ここで、$\sigma \in S_p$ は、「$\sigma(i_s) = j_s$」で定める置換である。