

幾何学II / 幾何学概論II：レポート問題2の答え

(1) 交代式 $\omega \in \text{Alt}^p(V)$ において、次のように定める写像 $f_\omega: \text{Alt}^{n-p}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。

$$\omega \wedge \tau = f_\omega(\tau) \text{vol}$$

外積の性質より、 f_ω は線形写像であることが分かる。よって、「任意の $\tau \in \text{Alt}^{n-p}(V)$ に対して、 $f_\omega(\tau) = \langle * \omega, \tau \rangle_{n-p}$ 」を満たす元 $* \omega \in \text{Alt}^{n-p}(V)$ は一意的に存在することを得る。以下、このように定義された写像

$$*: \text{Alt}^p(V) \rightarrow \text{Alt}^{n-p}(V)$$

は線形写像であることを示す。まず、任意の $\omega, \omega' \in \text{Alt}^p(V)$ と $\tau \in \text{Alt}^{n-p}(V)$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle *(\omega + \omega'), \tau \rangle \text{vol} &= (\omega + \omega') \wedge \tau = \omega \wedge \tau + \omega' \wedge \tau = \langle * \omega, \tau \rangle \text{vol} + \langle * \omega', \tau \rangle \text{vol} \\ &= (\langle * \omega, \tau \rangle + \langle * \omega', \tau \rangle) \text{vol} = \langle * \omega + * \omega', \tau \rangle \text{vol} \end{aligned}$$

ため、

$$\langle *(\omega + \omega'), \tau \rangle = \langle * \omega + * \omega', \tau \rangle$$

が分かる。よって、

$$\langle *(\omega + \omega') - * \omega - * \omega', \tau \rangle = 0$$

を得る。特に、 $\tau = *(\omega + \omega') - * \omega - * \omega'$ のとき、

$$\| *(\omega + \omega') - * \omega - * \omega' \|^2 = 0$$

ため、

$$*(*(\omega + \omega')) = * \omega + * \omega'$$

が成り立つ。同様に、 $*(\lambda \omega) = \lambda(*\omega)$ が成り立つ。よって、

$$*: \text{Alt}^p(V) \rightarrow \text{Alt}^{n-p}(V)$$

は、うまく定義された線形写像であることを示した。

(2) 与えられた正規直交基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ に対して、

$$\{b_{\tau(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\tau(n)}^* \mid \tau \in S_{p, n-p}\} \subset \text{Alt}^{n-p}(V)$$

は正規直交基底となる。今、

$$b_1^* \wedge \cdots \wedge b_p^* \wedge b_{\tau(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\tau(n)}^* = \begin{cases} \text{vol} & (\tau = \text{id}) \\ 0 & (\tau \neq \text{id}) \end{cases}$$

であるため、

$$*(b_1^* \wedge \cdots \wedge b_p^*) = b_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge b_n^*$$

を得る。

(3) 任意の $\tau \in S_{p,n-p}$ に対して、

$$b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \wedge b_{\tau(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\tau(n)}^* = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) \text{vol} & (\tau = \sigma) \\ 0 & (\tau \neq \sigma) \end{cases}$$

であるため、

$$*(b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*) = \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}^*$$

が分かる。

(4) 次のように定義された置換 $\tau \in S_n$ をおいておく。

$$\tau(i) = \begin{cases} i+p & (1 \leq i \leq n-p) \\ i-n+p & (n-p+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

このとき、 σ を $\sigma\tau$ に移す $S_{p,n-p} \rightarrow S_{n-p,p}$ が全単射となる。よって、(3) より、

$$\begin{aligned} *(*(\sigma(b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*))) &= *(\text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}^*) = \text{sgn}(\sigma) *(\sigma(b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}^*)) \\ &= \text{sgn}(\sigma) *(\sigma(b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n-p)}^*)) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma\tau) b_{\sigma(n-p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}^* \\ &= \text{sgn}(\tau) b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* = (-1)^{p(n-p)} b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \end{aligned}$$

が分かる。