

幾何学II / 幾何学概論II：レポート問題2の答え

問題 1. (1) d^* の定義より、

$$d^* \circ d^* = ((-1)^{n(p+1)-1} * \circ d \circ *) \circ ((-1)^{np-1} * \circ d \circ *) = (-1)^{n-1} * \circ d \circ * \circ * \circ d \circ *$$

である。ここで、

$$* \circ * = (-1)^{(n-(p-1))(p-1)} \text{id}: \Omega^{n-(p-1)}(U) \rightarrow \Omega^{n-(p-1)}(U)$$

ため、 $d \circ d = 0$ より、 $d^* \circ d^* = 0$ が分かる。

(2) まず、 d^* の定義より、

$$\begin{aligned} d^*(f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) &= (-1)^{n(p+1)-1} * (d(* (f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p))) \\ &= (-1)^{n(p+1)-1} * (d(f \wedge dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n)) \\ &= (-1)^{n(p+1)-1} * \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\ &= (-1)^{n(p+1)-1} * \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\ &= (-1)^{n(p+1)-1} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge *(dx_i \wedge dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\sigma = \sigma_i \in S_{n-(p-1), p-1}$ を、

$$\sigma(s) = \begin{cases} i & (s = 1) \\ s + p - 1 & (2 \leq s \leq n - (p - 1)) \end{cases}$$

で定めるシャッフルとすると、

$$\begin{aligned} *(dx_i \wedge dx_{p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= *(dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n-(p-1))}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) dx_{\sigma(n-(p-1)+1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \\ &= \text{sgn}(\sigma) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

が分かる。さらに、

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1} ((-1)^{p-1})^{n-p} = (-1)^{n(p-1)-1+i}$$

ため、

$$d^*(f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_p$$

を示した。

(3) その(2)と同じ方法で解けるが、置換 σ の符号がもつと計算しにくいので、その代わりに変数変換を用い解ける。さて、 $\tau(1) = i_1, \dots, \tau(p) = i_p$ を満たす $(p, n-p)$ シャッフル $\tau \in S_{p, n-p}$ とし、 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を、 $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$ で定める微分同相とする。このとき、 $U' = \phi^{-1}(U)$ とすると、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U') & \xrightarrow{\Omega^p(\phi)} & \Omega^p(U) \\ \downarrow \text{sgn}(\tau)^* & & \downarrow * \\ \Omega^{n-p}(U') & \xrightarrow{\Omega^{n-p}(\phi)} & \Omega^{n-p}(U) \end{array}$$

なぜなら、

$$\begin{aligned} \Omega^n(\phi)(\text{vol}) &= \phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = dx_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\tau(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \text{sgn}(\tau) \text{vol} \end{aligned}$$

である。従って、 $\text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\tau) = +1$ ため、次の図式も可換になることが分かる。

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U') & \xrightarrow{\Omega^p(\phi)} & \Omega^p(U) \\ \downarrow d^* & & \downarrow d^* \\ \Omega^{p-1}(U') & \xrightarrow{\Omega^{p-1}(\phi)} & \Omega^{p-1}(U) \end{array}$$

今、 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を $f = g \circ \phi: U' \rightarrow \mathbb{R}$ と表すと、

$$\begin{aligned} d^*(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) &= d^*(\Omega^p(\phi)(g \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)) \\ &= \Omega^{p-1}(\phi)(g)(d^*(g \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)) \\ &= \Omega^{p-1}(\phi)\left(\sum_{s=1}^p (-1)^s \frac{\partial g}{\partial x_s} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{s-1} \wedge dx_{s+1} \wedge \cdots \wedge dx_p\right) \\ &= \sum_{s=1}^p (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{s-1}} \wedge dx_{i_{s+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

が成り立つ。

問題 2. (1) 問題 1 その (3) を用い、

$$\begin{aligned} (d \circ d^*)(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) &= d\left(\sum_{s=1}^p (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^p (-1)^s \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_s}} \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} (d^* \circ d)(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) &= d^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &\quad - \sum_{s=1}^p \sum_{i=1}^n (-1)^s \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_s} \partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

を得る。ただし、「 $\widehat{dx_{i_s}}$ 」は、「 dx_{i_s} を除いた」意味である。従って、

$$\Delta(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

が分かる。

(2) 反復したホッジ演算子の公式より、

$$d \circ * \circ d \circ * \circ * = * \circ * \circ d \circ * \circ d$$

が分かる。これを用い、

$$\Delta \circ * = * \circ \Delta: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{n-p}(U)$$

を示す。まず、

$$\begin{aligned} \Delta \circ * &= (d \circ d^* + d^* \circ d) \circ * \\ &= (-1)^{n(n-p+1)-1} d \circ * \circ d \circ * \circ * + (-1)^{n(n-p+2)-1} * \circ d \circ * \circ d \circ * \\ &= (-1)^{n(n-p+1)-1} * \circ * \circ d \circ * \circ d + (-1)^{n(n-p+2)-1} * \circ d \circ * \circ d \circ * \\ &= (-1)^{np-1} * \circ * \circ d \circ * \circ d + (-1)^{n(p+1)-1} * \circ d \circ * \circ d \circ * \end{aligned}$$

である。一方、

$$\begin{aligned} * \circ \Delta &= * \circ (d \circ d^* + d^* \circ d) \\ &= (-1)^{n(p+1)-1} * \circ d \circ * \circ d \circ * + (-1)^{n(p+2)-1} * \circ * \circ d \circ * \circ d \\ &= (-1)^{np-1} * \circ * \circ d \circ * \circ d + (-1)^{n(p+1)-1} * \circ d \circ * \circ d \circ * \end{aligned}$$

であるため、

$$* \circ \Delta = \Delta \circ *$$

が成り立つ。特に、 $\Delta(\omega)$ はゼロであれば、 $\Delta(*\omega)$ もゼロであることが分かる。