

練習問題その 10

問題 1. 次のように定める写像 $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が内積となることを示せ。

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

問題 2. $(V, \langle -, - \rangle)$ を内積空間とする。任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

であることを示せ。(ヒント: $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$)

問題 3. $(V, \langle -, - \rangle)$ を内積空間、 $W \subset V$ を部分空間とする。次の命題を示せ。

(i) 次のように定める部分集合 $W^\perp \subset V$ は部分空間である。

$$W^\perp = \{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して、} \langle v, w \rangle = 0 \text{ である} \}$$

($W^\perp$ は、 W の V における **直交補空間** と呼ばれる。)

(ii) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ である。

問題 4. 以下の部分集合 $S = S(\theta, \varphi) \subset \mathbb{R}^3$ を考えてみる。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\}$$

次の各問いに答えよ。

(1) $S \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交基底であることを示せ。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する座標 c_1, c_2, c_3 を求めよ。