

練習問題その4

問題 1. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w} \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

は、 V の部分空間であることを示せ。(ヒント：授業1の命題7)

問題 2. V を有限次元ベクトル空間とし、 $W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とする。次の命題を示せ。

「 $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2)$ ならば $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 」

問題 3. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ を満たす平面 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ を求めよ。

問題 4 (難しい). V を有限次元ベクトル空間とし、 $W_1, W_2, W_3 \subset V$ を次の性質 (i)–(ii) を満たす部分空間とする。

(i) $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$

(ii) $(W_1 \cap W_2) + W_3 = (W_3 \cap W_1) + W_2 = V$

このとき、 $(W_2 \cap W_3) + W_1 = V$ であることを示せ。(ヒント：命題6)