練習問題その５

問題 1. $F\colon U \to V$ を線形写像とする。F は全単射のとき、$F^{-1}\colon V \to U$ も線形写像であることを示せ。ただし、$F^{-1}\colon V \to U$ は、「$F^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \Leftrightarrow F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$」で定める写像である。

問題 2. 例 7 におけるベクトル空間 U とその基底 $R \subset U$ を思い出す。以下のように定める線形写像 $G, H\colon U \to \mathbb{R}^2$ の基底 $R \subset U$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 B, C を求めよ。

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

問題 3. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の次のように定める基底 $R \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。ただし、恒等写像とは、$\mathrm{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定める写像である。

$$R = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 4. 次の線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ と基底 $R \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset \mathbb{R}^2$ を考えてみる。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y + z \\ x + 5y + 3z \end{pmatrix}$$

$$R = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき、$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の基底 R と S に関する表現行列 A を求めよ。