

練習問題その9

問題 1. 有限次元ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ において、

$$F^k = F \circ \cdots \circ F: V \rightarrow V$$

を、 k 倍の合成写像とする。次の各命題を示せ。

- (i) λ は F の固有値であるとき、 λ^k が F^k の固有値となる。
- (ii) F^k はゼロ写像であるとき、 F の固有値が、 $\lambda = 0$ に限られている。
- (iii) F^k はゼロ写像、 $\lambda \neq 0$ のとき、 $F - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$ は全単射である。

問題 2. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問い合わせよ。

- (i) F の固有多項式 $\chi_F(t)$ を求めよ。
- (ii) F の各固有値を求めよ。
- (iii) F の各固有空間の基底を求めよ。

問題 3. 実数 $a \in \mathbb{R}$ について、 $F_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定める線形写像とする。

$$F_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問い合わせよ。

- (i) F_a の固有多項式を求めよ。
- (ii) F_a の各固有値を求めよ。
- (iii) F_a の各固有空間の基底を求めよ。
- (iv) \mathbb{R}^3 が F_a の固有ベクトルからなる基底を持つかどうかは調べよ。