

10 内積空間

内積空間とは、ベクトル空間 V と以下のように定める V 上の内積 $\langle -, - \rangle$ からなる組 $(V, \langle -, - \rangle)$ のものである。内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に関して、 $\mathbf{v} \in V$ の長さ $\|\mathbf{v}\|$ とゼロでない $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のなす角 θ が定義できる。

定義 1. ベクトル空間 V 上の内積とは、次の性質を満たす写像

$$\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

のことである。

- (i) 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in V$ に対して、 $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$ である。
- (ii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ である。
- (iii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ である。
- (iv) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ である
- (v) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ なら、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

ベクトル空間 V と V 上の内積 $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ からなる組 $(V, \langle -, - \rangle)$ は、内積空間と呼ばれる。

例 2. (1) $\mathbb{R}^n$ のとき、次のように定める写像

$$\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

は、内積で、 $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積と呼ばれる。

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

内積空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ は n 次元ユークリッド空間と呼ばれる。

(2) 連続関数のなすベクトル空間 $C^0([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続である} \}$ に関して、次のように定める写像 $\langle -, - \rangle: C^0([a, b]) \times C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ は、内積である。

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

定義 3. 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ が直交しているとは、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

が成り立つときにいう。

例 4. (0) 任意の内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に関して、零ベクトル $\mathbf{0} \in V$ と任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ が直交している。

(1) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ に関して、基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ が互いに直交している。なぜなら、任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して、

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

(2) 関数空間 $(C^0([0, 2\pi]), \langle -, - \rangle)$ に関して、 $\cos x$ と $\sin x$ が直交している。なぜなら、

$$\langle \cos x, \sin x \rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x dx = 0$$

である。

定義 5. 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、内積 $\langle -, - \rangle$ に関連するノルムとは、

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

で定める写像 $\| - \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ である。

例 6. (1) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ において、

$$\|2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\|4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

である。

(2) 関数空間 $(C^0([0, 2\pi]), \langle -, - \rangle)$ において、

$$\|\sin x\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} = \sqrt{\pi}$$

である。

命題 7 (コーシー・シュワルツの不等式). 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に関して、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

証明. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ を固定する。定義 1 その (iv) より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \geq 0$$

が分かる。一方、定義 1 その (i)–(iii) より、

$$\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{v}\|^2$$

を得る。よって、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

が分かる。ゆえに、二次方程式の解の公式より、

$$\Delta^2 = (2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0$$

が成り立つ。すなわち、

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

を得る。 □

系 8 (三角不等式). 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に関して、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

である。

証明. コーシー・シュワルツの不等式より、

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

が分かる。さらに、 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|, \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ は非負の実数であるため、系が成り立つ。 $\square$

定義 9. 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、ゼロでないベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のなす **角** とは、次の条件 (i)–(ii) で一意的に決定された次数 θ である。

$$(i) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$(ii) \quad \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

例 10. (1) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ に関して、 $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ と $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ のなす角は、次のように決定された実数 $\theta \in [0, \pi]$ である。

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$$

計算すると、 $\theta \doteq 35.26^\circ$ となる。

定義 11. $(V, \langle -, - \rangle)$ を内積空間とする。

(1) 次の性質を満たす部分集合 $S \subset V$ は、**正規直交** であると呼ばれる。

「任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ に対して、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathbf{u} = \mathbf{v}) \\ 0 & (\mathbf{u} \neq \mathbf{v}) \end{cases}$$

である。」

(2) 正規直交である基底 $S \subset V$ は、**正規直交基底** と呼ばれる。

補題 12. 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ とその正規直交基底 $S \subset V$ に関して、任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して、

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{u} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$$

である。

証明. $S \subset V$ が基底であるため、任意の $\mathbf{v} \in V$ は、一意的に次のように表される。

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \mathbf{w} \quad (c_{\mathbf{w}} \in \mathbb{R})$$

$S \subset V$ が正規直交であるため、任意の $\mathbf{u} \in S$ に対して、

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \mathbf{w}, \mathbf{u} \right\rangle = \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = c_{\mathbf{u}}$$

を得る。これで補題を示した。 □

命題 13 (グラム・シュミットの正規直交化法). 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ 、有限の 1 次独立である部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ において、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ を、帰納法を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{1 \leq i < k} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{v}'_k}{\|\mathbf{v}'_k\|} \end{aligned}$$

で定義される部分集合とする。

(1) $S \subset V$ は正規直交である。

(2) $S \subset V$ で生成される部分空間と $T \subset V$ で生成される部分空間は等しい。

証明. 帰納法を用いて示す。 $n = 1$ のときは自明なので、 $n = r - 1$ のときを正しいと仮定し、 $n = r$ のときを示せばよい。

以下、(1) を示す。帰納法の仮定より、 $S' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}\} \subset V$ は正規直交であることが分かる。さらに、 $\mathbf{u}_r$ の定義より、

$$\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r \rangle = 1,$$

任意の $1 \leq j < r$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_j \rangle &= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \langle \mathbf{v}'_r, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \left\langle \mathbf{v}_r - \sum_{1 \leq i < r} \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle \\ &= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \left(\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle - \sum_{1 \leq i < r} \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \right) \\ &= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} (\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle) = 0 \end{aligned}$$

を得る。すなわち、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は正規直交であることを示した。これで、(1) を示した。

さて、(2) を示す。帰納法の仮定より、

$$S' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}\} \subset V$$

$$T' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}\} \subset V$$

で生成される部分空間は等しい、 $\mathbf{u}_r$ の定義より、

$$\mathbf{v}_r = \sum_{1 \leq i < r} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i + \|\mathbf{v}_r'\| \mathbf{u}_r$$

ため、

$$S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}, \mathbf{u}_r\} \subset V$$

$$T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{v}_r\} \subset V$$

で生成される部分空間は等しいことが分かる。これで、(2) を示した。 $\square$

系 14. 有限次元内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に対して、正規直交基底 $S \subset V$ が存在する。

証明. 基底 $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ をとると、グラム・シュミットの正規直交化法で定める部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は正規直交基底であることが分かる。 $\square$

例 15. 次の部分集合 $S = S(\theta) \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交基底である。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\}$$

なぜなら、

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

ため、 $S \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交である。特に、 $S \subset \mathbb{R}^2$ は 1 次独立であることが分かる。 S の個数と $\mathbb{R}^2$ の次元は等しいため、 $S \subset \mathbb{R}^2$ は基底であることが成り立つ。すなわち、 $S \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交基底である。さらに、補題 12 より、ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

の基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する座標 c_1, c_2 は、次のように表される。

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ c_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned}$$