

12 対称行列の対角化

任意の正方行列 A は、必ずしも固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持たない。例として、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えてみる。このとき、 A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE) = t^2 + 1$ が根 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持たないため、 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ がないことを得る。

定理 1. 任意の対称行列 A は、少なくとも一つ固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持つ。

証明. A を n 次の対称行列とする。

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

を球面、 $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める写像とする。

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$$

S^{n-1} はコンパクトで、 f は連続であるため、解析で証明されている定理より、 f の最大点 $\mathbf{z} \in S^{n-1}$ が存在することが分かる。すなわち、 $\lambda = f(\mathbf{z})$ とすると、任意の $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ に対して、 $f(\mathbf{x}) \leq \lambda$ が分かる。ゆえに、

$$B = A - \lambda E$$

とすると、次の性質 (i)–(iii) が成り立つ。

- (i) B は対称行列である。
- (ii) $\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle = 0$ である。
- (iii) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\langle \mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle \leq 0$ である。

性質 (i)–(ii) を用いて、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z} + tB\mathbf{z}, B(\mathbf{z} + tB\mathbf{z}) \rangle &= \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t\langle \mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \\ &= 0 + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \\ &= 2t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \end{aligned}$$

を得る。よって、性質 (iii) より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$2t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \leq 0$$

が分かる。よって、二次方程式の解の公式より、

$$\Delta^2 = (2\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle)^2 \leq 0$$

を得るため、 $\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle = 0$ が分かる。このとき、 $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ を得るため、 $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ が成り立つ。すなわち、 λ は A の固有値であることを示した。□

定理 2 (対称行列の対角化). 任意の対称行列 A に対して、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在する。

証明. 帰納法を用いて、任意の n 次対称行列 A に対して、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような n 次直交行列 P が存在することを示す。 $n = 1$ のときは自明であるので、 $n = r - 1$ のときが正しいを仮定し、 $n = r$ のときを示せばよい。定理 1 より、 A の固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ をとることができる。 $\mathbf{z}_1$ を $\|\mathbf{z}_1\| = 1$ を満たす λ_1 に属する A の固有ベクトルとし、 $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_r\}$ を $\mathbf{z}_1$ を含む $\mathbb{R}^r$ の正規直交基底とする。このとき、

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{z}_r \end{pmatrix}$$

が直交行列であるため、 $Q^{-1}AQ$ も対称行列である。なぜなら、

$${}^t(Q^{-1}AQ) = {}^tQ \ {}^tA \ {}^t(Q^{-1}) = Q^{-1}AQ$$

である。さらに、 $A\mathbf{z}_1 = \lambda_1\mathbf{z}_1$ であるため、

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_2 & \dots & c_r \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

と表される。ここで、 $Q^{-1}AQ$ は対称行列であるため、 $c_2 = \cdots = c_r = 0$ 、 B が $r-1$ 次対称行列であることが分かる。ゆえに、帰納法の仮定より、

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

となるような $r-1$ 次直交行列 R が存在することが分かる。よって、

$$P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

とすると、 P は r 次直交行列で、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}BR & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かる。これで、定理を示した。 □

系 3. n 次対称行列 A に対して、 A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $S \subset \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明. 対称行列の対角化の定理 2 より、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を満たす n 次直交行列 P が存在することが分かる。それに対して、

$$S = \{P\mathbf{e}_1, P\mathbf{e}_2, \dots, P\mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

が正規直交基底、 $AP\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ であることが成り立つ。 □

例題 4. 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ。対角化に必要な直交行列 P も記すこと。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答. 以下の (1)–(3) で、 A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を計算する。最後に、以下の (4) で、 A の直交行列で用いて対角化、対角化に必要な直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式を計算する。

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 2 & -2-t & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4-2t & -2t+t^2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -t \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4-t \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)^2(-4-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)^2(-4-t) \end{aligned}$$

これから、 A の固有値は 2 と -4 であることが分かる。

(2) A の固有値 2 と -4 に属する固有空間 $\ker(A - 2E)$ と $\ker(A + 4E)$ を計算する。 $A - 2E$ を簡約化した行列 B を計算すると、

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得るため、

$$(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

が分かる。よって、

$$\ker(A - 2E) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

が成り立つ。同様に、 $A + 4E$ の簡約化 C を計算すると、

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得るため、

$$(A + 4E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

が分かる。よって、

$$\ker(A + 4E) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

が成り立つ。

(3) グラム・シュミットの正規直交化法（授業 10 の命題 13）で、基底

$$S_2 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A - 2E)$$

$$S_{-4} = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A + 4E)$$

を正規直交化した基底 $T_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ と $T_{-4} = \{\mathbf{u}_3\}$ を計算する。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これで、 A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を計算した。

(4) P を、直交行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

であることが分かる。なぜなら、 $P^{-1}AP$ は、基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}$ に関する

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

で定める線形写像 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の表現行列である。

□