2　１次結合と１次独立

これから、ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を単に V と書く。

定義 **1.** ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}$ が V の有限個のベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ を用いて

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

と書かれるとき、ベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ の 1 次結合で書かれるという。

注 2. 0 個のベクトルの 1 次結合は、ゼロベクトル $\mathbf{0}$ となることを定義する。

例 3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対して、任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ は、$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の 1 次結合で表される。なぜなら、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2v_1 + v_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2)\mathbf{u}_1 + (-2v_1 + v_2)\mathbf{u}_2$$

である。

次に、ベクトル空間 V の部分集合 $S \subset V$ を考える。

命題 **4.** ベクトル空間 V とその部分集合 $S \subset V$ に対して、S に含まれているベクトルの 1 次結合からなる部分集合

$$W = \{c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \mid n \geqslant 0;\ \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in S;\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\} \subset V$$

は、V の部分空間である。

証明. W は、授業 1 の命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。まず、W はゼロベクトル $\mathbf{0}$ を含むため、性質 (i) が成り立つ。それで、任意の W に含まれている

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m \qquad (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in S;\ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R})$$
$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S;\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R})$$

に対して、

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_m\mathbf{u}_m+d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n$$

も W に含まれているため、性質 (ii) が成り立つ。最後に、

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_m\mathbf{u}_m \qquad (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\in S;\ c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R})$$

が W に含まれているとき、そのスカラー a 倍

$$a\mathbf{u}=ac_1\mathbf{u}_1+\cdots+ac_m\mathbf{u}_m$$

も W に含まれているため、性質 (iii) が成り立つ。授業 8 の命題 7 より、$W\subset V$ は部分空間であることが成り立つ。 □

定義 **5.** ベクトル空間 V とその部分集合 $S\subset V$ において、部分空間

$$W=\{c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n \mid n\geqslant 0;\ \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\in S;\ c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}\}\subset V$$

は、S で生成された部分空間と呼ばれる。

例 6. 例 3 におけるベクトル $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2$ のなす部分集合 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\subset\mathbb{R}^2$ は、全空間 $W=\mathbb{R}^2$ を生成する。

定義 **7.** V をベクトル空間とする。

(1) 次の性質を満たす部分集合 $S\subset V$ は、1 次独立であると呼ばれる。
「任意の $n\geqslant 1$ と $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\in S$、$c_1,c_2\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して、

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$$

なら、必ず $c_1=0,c_2=0,\ldots,c_n=0$ である。」

(2) 1 次独立でない部分集合 $S\subset V$ は、1 次従属であると呼ばれる。

例 8. (1) 空集合 $\emptyset\subset V$ は 1 次独立である。

(2) ゼロベクトルからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}\subset V$ は 1 次従属である。なぜなら、$1\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ なのに、$1=0$ ではない。

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のなす部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である。なぜなら、

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

はゼロベクトルなら、必ず $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ である。

(4) 例 3 におけるベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ からなる部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は 1 次独立である。なぜなら、方程式 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ と連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は同値であるため、$c_1 = 0,\ c_2 = 0$ であることが分かる。

命題 **9.** V をベクトル空間、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ を k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合、$W \subset V$ を h 個のベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ で生成された部分空間とする。このとき、$S \subset W$ なら、必ず $k \leqslant h$ である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$h = 0$ のとき、$W = \{\mathbf{0}\} \subset V$ ため、例 8 その (2) より、$k = 0$ が分かる。よって、$h = r - 1$ のときを正しいと仮定し、$h = r$ のときを示せばよい。定義 5 より、$S \subset W$ ため、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ が、次のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1r}\mathbf{v}_r \\
\mathbf{u}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2r}\mathbf{v}_r \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_k &= a_{k1}\mathbf{v}_1 + a_{k2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{kr}\mathbf{v}_r
\end{aligned}$$

まず、$a_{1r} = 0, a_{2r} = 0, \dots, a_{kr} = 0$ のとき、S は部分集合 $T' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}\} \subset V$ で生成された部分空間 $W' \subset V$ に含まれているため、帰納法の仮定より、$k \leqslant r-1$ が分かる。特に、このとき $k \leqslant r$ である。それから、$a_{1r} \neq 0$ のとき、次のように定める $k-1$ 個のベクトル $\mathbf{u}_2', \dots, \mathbf{u}_k'$ からなる部分集合 $S' \subset V$ は、以上の部分空間 $W' \subset V$ に含まれている。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_2' &= \mathbf{u}_2 - \frac{a_{2r}}{a_{1r}}\mathbf{u}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_k' &= \mathbf{u}_k - \frac{a_{kr}}{a_{1r}}\mathbf{u}_1
\end{aligned}
$$

さらに、S' は 1 次独立であるため、帰納法の仮定より、$k-1 \leqslant r-1$ が分かる。すなわち、このときも $k \leqslant r$ である。

以下、$S' \subset V$ は 1 次独立であることを示す。連立 1 次方程式

$$c_2\mathbf{u}_2' + \cdots + c_k\mathbf{u}_k' = \mathbf{0}$$

と連立 1 次方程式

$$\frac{-1}{a_{1r}}(c_2a_{2r} + \cdots + c_ka_{kr})\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

は同値である。さらに、$S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ は 1 次独立であるため、$c_2 = 0, \dots, c_k = 0$ が分かる。よって、$S' = \{\mathbf{u}_2', \dots, \mathbf{u}_k'\} \subset V$ は 1 次独立であるこを得る。

最後に、$a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{kr}$ のいずれかは、ゼロでないとき、同様に $k \leqslant r$ が示される。これで、命題が成り立つ。 □

例 10. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は、2 個のベクトルからなる部分集合で生成されるため、命題 9 より、3 個以上のベクトルからなる部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ は、必ず 1 次従属であることが分かる。