3　基底と次元

定義 **1.** ベクトル空間 V において、V が有限個のベクトルからなる部分集合 $T \subset V$ で生成されるとき、V は有限次元ベクトル空間と呼ばれる。

例 2. (1) ゼロ空間 $\{\mathbf{0}\}$ は零個のベクトルからなる空集合 $\emptyset \subset \{\mathbf{0}\}$ で生成されるので、有限次元であることが分かる。

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は、基本ベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ で生成されるので、有限次元であることが分かる。

命題 **3.** 有限次元ベクトル空間 V に対して、任意の部分空間 $W \subset V$ は、有限次元でもある。

証明. V を生成する有限の部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ を固定し、$W \subset V$ を、有限次元でない部分空間とする。以下、任意の $k \geqslant 0$ に対して、k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset W$ が存在することを示す。しかし、授業 2 命題 9 より、任意の h 個以上のベクトルからなる部分集合 $S \subset V$ は、1 次従属であるため、このような有限次元でない部分空間 $W \subset V$ が存在しないことが成り立つ。

今、帰納法を用いて、任意の $k \geqslant 0$ に対して、k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset W$ が存在することを示す。まず、$k = 0$ のときは自明なので、$k = n - 1$ のときを正しいとし、$k = n$ のときを示せばよい。$W' \subset W$ を、$n - 1$ 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ で生成される部分空間とする。W は有限次元でない仮定より、$W' \neq W$ が分かる。以下、任意の $\mathbf{u}_n \in W \smallsetminus W'$ に対して、

$$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\} \subset W$$

は 1 次独立であることを示す。任意の 1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

に対して、$c_n \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{u}_n = -\frac{1}{c_n}(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}) \in W'$$

を得るため、$c_n = 0$ が分かる。よって、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{0}$$

で、$S' \subset W$ は 1 次独立であるため、$c_1 = 0, \dots, c_{n-1} = 0$ が分かる。すなわち、$S \subset W$ は 1 次独立であることを示した。これで命題が成り立つ。 $\square$

例 4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は有限次元であるため、命題 3 より、任意の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ も有限次元であることが分かる。

有限次元ベクトル空間 V は、部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ で生成されているとき、任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ は、次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \qquad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

さらに、$S \subset V$ は 1 次独立でもあるとき、このような表現は、一意的である。なぜなら、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n$$

なら、

$$(c_1 - d_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

を得るため、$c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0$ が分かる。

定義 **5.** V を有限次元ベクトル空間とする。

(1) V を生成し、1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は、V の基底と呼ばれる。

(2) 基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ と $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ で表されている $\mathbf{v} \in V$ において、$c_1, \dots, c_n$ は、$\mathbf{v}$ の基底 S に関する座標と呼ばれる。

例 6. (1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に関して、ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

からなる部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、基底である。なぜなら、任意のベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ で表される。基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の基本基底とよばれ、基本基底に関する座標 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は、$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の基本座標と呼ばれる。

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に関して、ベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

からなる部分集合 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ も、基底である。なぜなる、任意のベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x} = (-x_1 + x_2)\mathbf{u}_1 + (-2x_1 + x_2)\mathbf{u}_2$ で表される。よって、ベクトル $\mathbf{x}$ の基底 T に関する座標は、$c_1 = -x_1 + x_2$ と $c_2 = -2x_1 + x_2$ であることが分かる。

次の定理は、ベクトル空間に関する主定理である。

定理 **7.** V を有限次元ベクトル空間、$S \subset V$ を 1 次独立である部分集合、$S \subset T \subset V$ を V を生成する部分集合とする。そのとき、V は、$S \subset B \subset T$ を満たす基底 B を持つ。

証明. B を、1 次独立で、$S \subset B \subset T$ を満たすような最大の部分集合とし、$W \subset V$ を B で生成される部分空間とする。このとき、$W = V$ であることを示せばよい。$W \neq V$ を仮定すると、W に含まれていないベクトル $\mathbf{v} \in T$ が存在し、$B' = B \cup \{\mathbf{v}\} \subset V$ は 1 次独立である。しかし、これは B の最大性に矛盾するため、$W = V$ が分かる。

以下、B' は 1 次独立であることを示す。まず、V は有限次元であるため、授業 2 の命題 9 より、B は有限であることが分かる。ここで、$B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ とおくと、B' は、

$$B' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$$

で表される。さて、ある 1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

に対して、$c \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{c}(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) \in W$$

が成り立つ。よって、$\mathbf{v} \notin W$ 仮定より、$c = 0$ が分かる。さらに、B は 1 次独立であるため、$c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ も分かる。すなわち、B' は 1 次独立であることを示した。 □

注 8. (1) 定理 7 より、任意の有限次元ベクトル空間 V は、基底を持つ。($S = \emptyset \subset V$ は 1 次独立で、$T = V \subset V$ は V を生成し、$\emptyset \subset V$ である。)

(2) 集合論に於けるツォルノの補題を用いて、任意の必ずしも有限次元でないベクトル空間は、基底を持つことが示される。

補遺 **9.** 有限次元ベクトル空間 V に対して、基底の個数は、基底によらず一定である。

証明. 二つの基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset V$ と $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ が与えられているとき、それらの個数 m と n は等しいを示すばよい。まず、S は 1 次独立で、T は V を生成するため、授業 2 の命題 9 より、$m \leqslant n$ が分かる。同様に、T は 1 次独立で、S は V を生成するため、$n \leqslant m$ が分かる。これで補遺を示した。 □

定義 **10.** 有限次元ベクトル空間 V において、任意の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ の個数 n は、V の次元と呼ばれ、$\dim(V) = n$ と書かれる。

例 11. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に関して、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ の個数が n なので、$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ である。