4　部分空間と次元

線形代数の主定理（授業 3 の定理 7）を用い、部分空間の次元について結果を示す。

命題 1. 有限次元ベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ に対して、次の性質 (i)–(ii) が成り立つ。

(i) $\dim(W) \leqslant \dim(V)$ である。

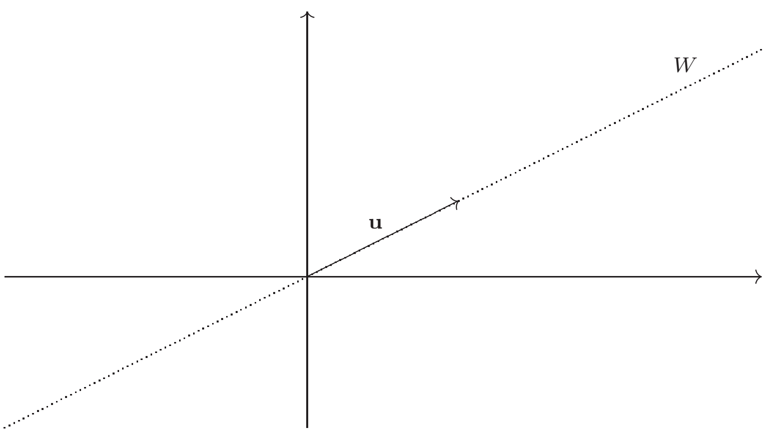
(ii) $\dim(W) = \dim(V)$ なら、$W = V$ である。

証明. $S \subset W$ を、W の基底とする。このとき、S は、V に含んでいる 1 次独立である部分集合なので、線形代数の主定理より、$S \subset B$ を満たす V の基底 $B \subset V$ が存在する。よって、S の個数 $\dim(W)$ は、B の個数 $\dim(V)$ 以下であるため、(i) が成り立つ。以上のように選んだ基底 $S \subset W$ と $B \subset V$ に対して、$S \subset B$ であるため、$\dim(W) = \dim(V)$ なら、$S = B$ が分かるため、(ii) が成り立つ。 $\square$

例 2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^2$ を考えてみる。まず、命題 1 の (i) より、$\dim(W) \leqslant \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ が分かる。

$\dim(W) = 0$ のとき、W の任意の基底 S が 0 個のベクトルからなるため、$S = \emptyset \subset W$ で、$W = \{\mathbf{0}\}$ であることが分かる。

$\dim(W) = 1$ のとき、W の任意の基底 S が 1 個のゼロでないベクトル $\mathbf{u}$ からなるため、$W = \{c\mathbf{u} \mid c \in \mathbb{R}\}$ が分かる。



$\dim(W) = 2$ のとき、命題 1 の (ii) より、$W = \mathbb{R}^2$ が分かる。

系 **3.** V を、有限次元ベクトル空間とする。

(i) V を生成する部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ に対して、T が V の基底であることと $h = \dim(V)$ であることは同値である。

(ii) 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ に対して、S が V の基底であることと $k = \dim(V)$ であることは同値である。

証明. V の次元を $n = \dim(V)$ とする。

(i) $T \subset V$ が基底であるとき、$h = n$ である。逆に、$T \subset V$ が基底でないとき、線形代数の主定理より、T に含まれている基底 $B = \{\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}\} \subset V$ が存在することが分かる。よって、$n < h$ を得る。

(ii) $S \subset V$ が基底であるとき、$k = n$ である。逆に、$S \subset V$ が基底でないとき、線形代数の主定理より、S を含む基底 $B \subset V$ が存在することが分かる。よって、$k < n$ を得る。 □

定義 **4.** ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ において、部分空間

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w}_2 \in W_2\} \subset V$$

は、W_1 と W_2 の和と呼ばれる。

注 5. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、練習問題その 4 の問題 1 より、部分集合 $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2 \subset V$ は、部分空間である。

命題 **6.** 有限次元ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

である。

証明. $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元をそれぞれ m, n, p とし、$W_1 \cap W_2$ の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ をとる。線形代数の主定理より、W_1 と W_2 に対して、次のような基底が存在する。

$$S_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-p}\} \subset W_1$$
$$S_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-p}\} \subset W_2$$

このとき、$T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-p}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-p}\}$ は、$W_1 + W_2$ の基底であるため、

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= p + (m-p) + (n-p) = m + n - p \\ &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

が分かる。

以下、T は $W_1 + W_2$ の基底であることを示す。

まず、T は $W_1 + W_2$ を生成することを示す。任意の $\mathbf{w} \in W$ は、

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad (\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2)$$

で表される。さらに、$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は、次のような 1 次結合で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} \\ \mathbf{w}_2 &= a'_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a'_p\mathbf{u}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p} \end{aligned}$$

よって、$\mathbf{w}$ は、

$$\mathbf{w} = (a_1 + a'_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (a_p + a'_p)\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p}$$

で表されるため、T は $W_1 + W_2$ を生成することを示した。

次に、T は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p} = \mathbf{0}$$

に対して、

$$\begin{aligned} &a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} \in W_1 \\ &a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} = -(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p}) \in W_2 \end{aligned}$$

であるため、

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} \in W_1 \cap W_2$$

が分かる。このベクトルを $\mathbf{v}$ とする。$S_1 \subset W_1$ は、1 次独立であるため、以上の表現

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p}$$

は、一意的である。しかし、$\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ で、S は、$W_1 \cap W_2$ を生成するため、$\mathbf{v}$ は、

$$\mathbf{v} = a'_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a'_p\mathbf{u}_p$$

でも表される。よって、$a'_1 = a_1, \dots, a'_p = a_p$ と $b_1 = \cdots = b_{m-p} = 0$ が分かる。同様に、$c_1 = 0, \dots, c_{n-p} = 0$ を得る。よって、

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

が分かる。S は 1 次独立であるため、$a_1 = 0, \dots, a_p = 0$ が分かる。これで、T は 1 次独立であることを示したため、命題が成り立つ。 □

定義 7. V を有限次元 n ベクトル空間，$W \subset V$ を部分空間とする。

(i) $\dim(W) = 1$ のとき、W は V の直線と呼ばれる。

(ii) $\dim(W) = 2$ のとき、W は V の平面と呼ばれる。

(iii) $\dim(W) = n - 1$ のとき、W は V の超平面と呼ばれる。

例 8. V を $\mathbb{R}^3$ とし、$W_1, W_2 \subset V$ を平面とする。このとき、

$$W_1 \subset W_1 + W_2 \subset V$$

であるため、

$$2 \leqslant \dim(W_1 + W_2) \leqslant 3$$

を得る。命題 6 より、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

がわかるため、

$$1 \leqslant \dim(W_1 \cap W_2) \leqslant 2$$

を得る。すなわち、$W_1 \cap W_2$ は、V の直線または平面であることが分かる。

さらに、$W_1 \cap W_2$ は平面のとき、$W_1 \supset W_1 \cap W_2 \subset W_2$ ため、命題 1 の (ii) より、

$$W_1 = W_1 \cap W_2 = W_2$$

が分かる。