6　座標変換

表現行列の定義を思い出す。有限次元ベクトル空間 U, V、それぞれの基底

$$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V,$$

線形写像 $F\colon U \to V$ において、F の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列とは、次のように定める $m \times n$ 行列である。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{v}_m \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

このとき、授業 5 の命題 6 より、任意の $\mathbf{x} \in U$ とその像 $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$ を、

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots x_n\mathbf{u}_n$$

$$F(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots y_m\mathbf{v}_m$$

で表すと、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

である。さらに、授業 5 の命題 8 より、W は、有限次元ベクトル空間、

$$T = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\} \subset W$$

は、基底、$G\colon V \to W$ は、線形写像、

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{km} \end{pmatrix}$$

www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2013_LA

は、G の基底 $S \subset V$ と $T \subset W$ に関する表現行列であるとき、合成写像

$$G \circ F \colon U \to W$$

の基底 $R \subset U$ と $T \subset W$ に関する表現行列は、$k \times n$ 行列

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。次の図式を考えると、命題 8 が覚えやすい。

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G\circ F"] & V \arrow[r, "G"] & W \\ R \arrow[r, dotted, "A"] \arrow[rr, dotted, bend right, "BA"'] & S \arrow[r, dotted, "B"] & T \end{tikzcd}$$

次のケースは特に重要である。

例 1. U を、有限次元ベクトル空間、$\mathrm{id}_U \colon U \to U$ を、恒等写像

$$\mathrm{id}_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}、$$

$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset U$ を、基底とする。このとき、id_U の基底 $R \subset U$ と $R \subset U$ に関する表現行列は、n 次の単位行列

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

となる。なぜなら、

$$\mathrm{id}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_{j-1} + 1\mathbf{u}_j + 0\mathbf{u}_{j+1} + 0\mathbf{u}_n$$

である。今、$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset U$ を、(他の)基底とする。このとき、

$$\mathbf{u}_j = p_{1j}\mathbf{v}_1 + p_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + p_{nj}\mathbf{v}_n \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

とおくと、id_U の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列は、次の $n \times n$ 行列 P である。

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

さらに、id_U の基底 $S \subset U$ と $R \subset U$ に関する表現行列 Q は、P の逆行列

$$Q = P^{-1}$$

である。なぜなら、授業 5 の命題 8 より、QP は、id_U の基底 $R \subset U$ と $R \subset U$ に関する表現行列 E_n であることが分かる。同様に、PQ は、id_U の基底 $S \subset U$ と $S \subset U$ に関する表現行列 E_n となることが分かる。よって、

$$QP = E_n$$
$$PQ = E_n$$

が成り立つ。すなわち、$Q = P^{-1}$ である。

例題 2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に関して、ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

の以下の基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する座標

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$$

を求めよ。

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

解答. P を、恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の基本基底 $R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ と基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列とすると、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

である。ここで、例 1 より、P は、$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ と $R \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 Q の逆行列 $P = Q^{-1}$ であることが分かる。さらに、表現行列の定義より、

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。今、$P = Q^{-1}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
(Q \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad ① + ② \\
(E_3 \mid Q^{-1}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad ② + ③
\end{aligned}$$

よって、ベクトル $\mathbf{x}$ の基底 S に関する座標は、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

で表される。 □

授業 5 の命題 8 を用いて、次の結果を示す。

系 **3.** U, V を、有限次元ベクトル空間、$F\colon U \to V$ を、線形写像、

$$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset U \qquad R' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\} \subset U$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V \qquad S' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m\} \subset V$$

を、基底とする。A を、F の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列、B を、F の基底 $R' \subset U$ と $S' \subset V$ に関する表現行列、P を、恒等写像 id_U の基底 $R' \subset U$ と $R \subset U$ に関する表現行列、Q を、恒等写像 id_V の基底 $S' \subset V$ と $S \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、

$$B = Q^{-1}AP$$

である。

証明. 例 1 より、Q^{-1} は、恒等写像 id_V の基底 $S \subset V$ と $S' \subset V$ に関する表現行列であること分かる。さらに、$F = \mathrm{id}_V \circ F \circ \mathrm{id}_U$ ため、系が、授業 5 の命題 8 から成り立つ。 □

注 4. 以下の図式を考えると、系 3 が分かりやすい。

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rrr, dotted, bend left, "A"] & & & S \\
& U \arrow[r, "F"] & V & \\
& U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[r, "F"] & V \arrow[u, "\mathrm{id}_V"'] & \\
R' \arrow[uuu, dotted, bend left, "P"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "B"'] & & & S' \arrow[uuu, dotted, bend right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

図式が可換になるため、

$$QB = AP$$

が分かる。よって、

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ。

例題 5. $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定義された線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

以下の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^2$ に関する F の表現行列を求めよ。

$$R' = \left\{ \mathbf{u}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S' = \left\{ \mathbf{v}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

解答. 基本基底 $R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ と $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する F の表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。さらに、恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $R \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列は、

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で、恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列は、

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。よって、系 3 を用いて、F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列は、

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

であることが分かる。 □

次の図式を考えると、例題 5 が分かりやすい。

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[rrr, dotted, bend left, "\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}"] & & & S \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 & \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathrm{id}_V"'] & \\
R' \arrow[uuu, dotted, bend left, "\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "B"'] & & & S' \arrow[uuu, dotted, bend right, "\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd}
$$