

8 階数

階数について色々な結果を示す。

命題 1. 任意の $m \times n$ 行列 B と $n \times p$ 行列 A に対して、

$$\text{rank}(BA) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

である。

証明. R と S, T を、それぞれ $\mathbb{R}^p$ と $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の基本基底とし、 $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を、それぞれの $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と $G(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ で定める線形写像とする。このとき、 F の $R \subset \mathbb{R}^p$ と $S \subset \mathbb{R}^n$ に関する表現行列は A 、 G の $S \subset \mathbb{R}^n$ と $T \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列は B 、 $G \circ F$ の $R \subset \mathbb{R}^p$ と $T \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列は BA である。さらに、授業7の命題7より、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(F)$$

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(G)$$

$$\text{rank}(BA) = \text{rank}(G \circ F)$$

が分かる。今、 $\text{im}(G \circ F) \subset \text{im}(G)$ ため、

$$\text{rank}(G \circ F) = \dim(\text{im}(G \circ F)) \leq \dim(\text{im}(G)) = \text{rank}(G)$$

が成り立つ。同様に、 $\ker(F) \subset \ker(G \circ F)$ ため、

$$\text{null}(G \circ F) = \dim(\ker(G \circ F)) \geq \dim(\ker(F)) = \text{null}(F)$$

が分かる。よって、

$$\text{rank}(G \circ F) = p - \text{null}(G \circ F) \leq p - \text{null}(F) = \text{rank}(F)$$

が成り立つ。これで、命題を示した。 □

定理 2. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、 $r = \text{rank}(F)$ とする。このとき、 F の $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列 C は、次の形となるような基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ が存在する。

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$$

証明. 授業 7 の定理 8 より、

$$\dim(\ker(F)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\operatorname{im}(F)) = n - r$$

が分かる。まず、 $\ker(F)$ の基底 $R'' = \{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ をとる。それから、 $\mathbb{R}^n$ の R'' を含む基底 $R' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ をとる。このとき、 $\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{v}_r = F(\mathbf{u}_r)$ とすると、部分集合 $S'' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset \operatorname{im}(F)$ が、 $\operatorname{im}(F)$ の基底である。なぜなら、 S'' が $\operatorname{im}(F)$ を生成し、 S'' の個数は $\operatorname{im}(F)$ の次元と等しい。特に、 $S'' \subset \mathbb{R}^m$ は 1 次独立であるため、 $\mathbb{R}^m$ の S'' を含む基底 $S' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m\}$ がとられる。

今、基底 R' と S' の定義より、

$$F(\mathbf{u}_j) = \begin{cases} \mathbf{v}_j & (1 \leq j \leq r) \\ \mathbf{0} & (r+1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

が分かる。すなわち、 F の基底 R' と S' に関する表現行列 C は、

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

となる。

□

系 3. 任意の $m \times n$ 行列 A に対して、次の性質 (i)—(ii) は同値である。

(i) $\operatorname{rank}(A) = r$ である。

(ii) $XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$ となるような可逆行列 X と Y が存在する。

証明. まず、(i) を仮定し、(ii) を示す。 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を、 $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義される線形写像とする。このとき、 F の基本基底 $R = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ と $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列は、 A である。定理 2 より、 F の基底 R' と S' に関する表現行列 C は、

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

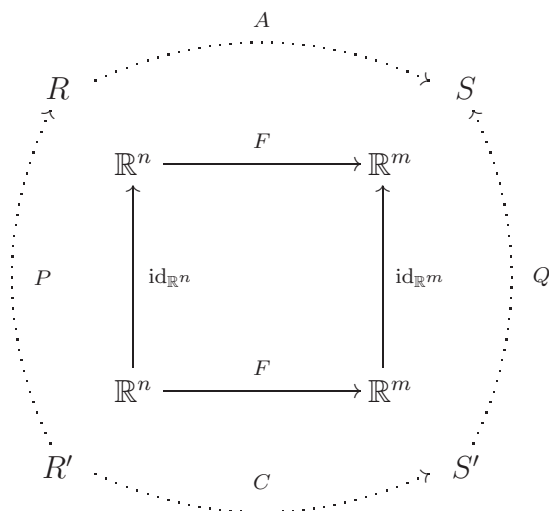
となるような基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ が存在する。ここで、

$$r = \operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(C)$$

である。今、 P を恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ の基底 R' と R に関する表現行列、 Q を恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}^m}$ の基底 S' と S に関する表現行列とすると、

$$C = Q^{-1}AP$$

が分かる。



よって、 $X = Q^{-1}$ 、 $Y = P$ とすると、(ii) が成り立つ。

逆に、(ii) を仮定すると、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(F) = \text{rank}(C) = r$$

が分かるため、(i) が成り立つ。 □

注 4. 任意の可逆行列は基本行列の積として書くことができる。ゆえに、任意の $m \times n$ 行列 A に対して、列基本変形と行基本変形を両方用いると、次の形の行列に変形できる。

$$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

ここで、 r は A の階数 $\text{rank}(A)$ である。

例 5. 次の 3×4 行列 A を考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

次のように行基本変形を使い、 A の簡約化 B が成り立つ。

$$B = E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-2)P_3(-\frac{1}{8})P_2(-\frac{1}{4})E_{3,1}(-9)E_{2,1}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

それから、列基本変形を使い、次の行列 $C = XAY$ が成り立つ。

$$C = BE_{1,3}(1)E_{1,4}(2)E_{2,3}(-2)E_{2,4}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$X = E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-2)P_3(-\frac{1}{8})P_2(-\frac{1}{4})E_{3,1}(-9)E_{2,1}(-5)$$

$$Y = E_{1,3}(1)E_{1,4}(2)E_{2,3}(-2)E_{2,4}(-3)$$

とすると、

$$XAY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。 X と Y を計算する。

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$