9 固有値と固有ベクトル

ベクトル空間 V と線形写像 $F\colon V \to V$ において、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$F - \lambda\,\mathrm{id}_V\colon V \to V$$

も線形写像である。なぜなら、

$$\begin{aligned}(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) - \lambda\mathbf{u}_1 - \lambda\mathbf{u}_2 \\ &= (F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}_1) + (F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}_2)\end{aligned}$$

$$(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(c\mathbf{u}) = F(c\mathbf{u}) - \lambda c\mathbf{u} = cF(\mathbf{u}) - c\lambda\mathbf{u} = c(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u})$$

定義 **1.** V をベクトル空間、$F\colon V \to V$ を線形写像とする。任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\ker(F - \lambda\,\mathrm{id}_V) = \{\mathbf{u} \in V \mid (F - \lambda\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{u} \in V \mid F(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}\} \subset V$$

がゼロ空間でないとき、λ は F の固有値、$\ker(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ は F の固有値 λ に属する固有空間、$\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \ker(F - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ は F の固有値 λ に属する固有ベクトルと呼ばれる。

例 2. (1) ゼロ写像 $\mathbf{0}\colon V \to V$ に対して、$\lambda = 0$ は固有値、$\lambda = 0$ に属する固有空間は V、任意の $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$ は $\lambda = 0$ に属する固有ベクトルである。さらに、$\lambda = 0$ 以外固有値はない。

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ に対して、$\lambda = 1$ は固有値、$\lambda = 1$ に属する固有空間は V、任意の $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$ は $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルである。さらに、$\lambda = 1$ 以外固有値はない。

(3) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

このとき、$\lambda = 2$ と $\lambda = 3$ は F の固有値、それらに属する固有空間は、次のように表される。

$$\ker(F - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\ker(F - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

(4) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

このとき、G の固有値はない。

(5) V を微分可能関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のなすベクトル空間、$D\colon V \to V$ を $D(f(x)) = f'(x)$ で定める線形写像とする。このとき、任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ は D の固有値で、λ に属する固有空間は、

$$\ker(D - \lambda\,\mathrm{id}_V) = \{ce^{\lambda x} \mid c \in \mathbb{R}\} \subset V$$

である。

これから、V を有限次元ベクトル空間とする。まず、V から自分自身への線形写像の行列式を定義する。

定義 **3.** V を有限次元ベクトル空間、$G\colon V \to V$ を線形写像とする。$S \subset V$ を基底、A を G の $S \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、G の行列式は、

$$\det(G) = \det(A)$$

で定義される。

以下、$\det(G)$ は、選んだ基底 $S \subset V$ によらず、うまく定義したものであることを示す。

補題 **4.** V を有限次元ベクトル空間、$G\colon V \to V$ を線形写像、$S \subset V$ と $T \subset V$ を基底、A と B をそれぞれ G の基底 $S \subset V$ に関する表現行列と G の基底 $T \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、$\det(A) = \det(B)$ である。

証明. P を恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ の基底 $T \subset V$ と $S \subset V$ に関する表現行列とすると、以下の図式を考えると、

$$B = P^{-1}AP$$

が分かる。

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rrr, dotted, bend left, "A"] & & & S \\
& V \arrow[r, "G"] & V & \\
& V \arrow[u, "\mathrm{id}_V"] \arrow[r, "G"] & V \arrow[u, "\mathrm{id}_V"'] & \\
T \arrow[uuu, dotted, bend left, "P"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "B"'] & & & T \arrow[uuu, dotted, bend right, "P"']
\end{tikzcd}$$

従って、

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

が成り立つ。 □

命題 **5.** V を有限次元ベクトル空間、$G\colon V \to V$ を線形写像とする。このとき、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\ker(G) \neq \{\mathbf{0}\}$

(ii) $\det(G) = 0$

証明. S を V の基底、A を G の S に関する表現行列とすると、

$$\begin{aligned}&\ker(G) = \{\mathbf{0}\} \iff \operatorname{null}(G) = 0 \iff \operatorname{rank}(G) = \dim(V) \iff \\ &\operatorname{rank}(A) = \dim(V) \iff \det(A) \neq 0 \iff \det(G) \neq 0\end{aligned}$$

が分かる。これで、命題が成り立つ。 □

定義 **6.** 有限次元ベクトル空間 V において，ある線形写像 $F\colon V \to V$ の固有多項式とは、

$$\chi_F(t) = \det(F - t\,\mathrm{id}_V)$$

で定める多項式である。

定理 **7.** V を有限次元ベクトル空間、$F\colon V \to V$ を線形写像とする。このとき、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) λ は F の固有値である。

(ii) λ は F の固有多項式 $\chi_F(t)$ の根である。

証明. $G = F - \lambda\,\mathrm{id}_V$ とする。固有値の定義より、λ が F の固有値であることと $\ker(G) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることは同値である。さらに、固有多項式 $\chi_F(t)$ の定義より、λ が固有多項式の根であることと $\det(G) = 0$ であることは同値である。ゆえに、定理は命題 5 から成り立つ。 □

例 8. 例 2 における線形写像をもう一回考えてみる。

(1) 有限次元 n のベクトル空間 V について、ゼロ写像 $\mathbf{0}\colon V \to V$ の固有多項式は、

$$\chi_{\mathbf{0}}(t) = \det(\mathbf{0} - t\,\mathrm{id}_V) = \det(-t\,\mathrm{id}_v) = (-t)^n$$

であるため、定理 7 より、$\lambda = 0$ は固有値で、それ以外の固有値はないことが分かる。

(2) 有限次元 n のベクトル空間 V について、恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ の固有多項式は、

$$\chi_{\mathrm{id}_V}(t) = \det(\mathrm{id}_V - t\,\mathrm{id}_V) = \det((1-t)\,\mathrm{id}_V) = (1-t)^n$$

であるため、定理 7 より、$\lambda = 1$ は固有値で、それ以外の固有値はないことが分かる。

(3) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の固有多項式は、

$$\chi_F(t) = \det(F - t\,\mathrm{id}) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -6 & 5-t \end{pmatrix} = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

であるため、定理 7 より、$\lambda = 2$ と $\lambda = 3$ は F の固有値で、それ以外の固有値はないことが分かる。

(4) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の固有多項式は、

$$\chi_G(t) = \det(G - t\,\mathrm{id}) = \det\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

であるため、定理 7 より、G の固有値はないことが分かる。

(5) 微分可能関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のなすベクトル空間 V は無限次元なので、線形写像 D の固有多項式が定義されていない。

命題 **9.** V をベクトル空間、$F\colon V \to V$ を線形写像、$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ を F のすべての固有値、$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ をそれらに属する固有ベクトルとする。このとき、部分集合

$$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$$

は 1 次独立である。

証明. 帰納法を用いて示す。$k = 0$ のときは自明なので、$k = r - 1$ のときを正しいと仮定し、$k = r$ のときを示せばよい。さて、

$$(F - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{u}_j) = (\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{u}_j$$

ため、ある 1 次関係 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ に対して、

$$\begin{aligned}&((F-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ(F-\lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(F-\lambda_{r-1}\operatorname{id}_V))(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r)\\ &= \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + (\lambda_r-\lambda_1)(\lambda_r-\lambda_2)\ldots(\lambda_r-\lambda_{r-1})c_r\mathbf{u}_r\end{aligned}$$

なので、$c_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ が分かる。ゆえに、$\mathbf{u}_r \neq \mathbf{0}$ ため、$c_r = 0$、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{u}_{r-1} = \mathbf{0}$$

を得る。帰納法の仮定より、$c_1 = 0, \ldots, c_{r-1} = 0$ ため、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は 1 次独立であることを示した。 □

系 **10.** V を有限次元 n のベクトル空間、$F\colon V \to V$ を n 個の互いに異なる固有値を持つ線形写像とする。このとき、V が F の固有ベクトルからなる基底を持つ。

証明. $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ を F の固有値、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ をそれらに属する固有ベクトルとする。命題 9 より、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は 1 次独立であることが分かる。S の個数 n は V の次元 n と等しいため、$S \subset V$ は基底であることが分かる。 □

例 11. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

F の固有多項式は $\chi_F(t) = (1-t)^2$ ため、$\lambda = 1$ は F の固有値で、それ以外の固有値はないことが分かる。さらに、$\lambda = 1$ と属する固有空間は、

$$\ker(F - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1\mathbf{e}_1 \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

である。よって、このとき、$\mathbb{R}^2$ が F の固有ベクトルからなる基底を持たない。