線形代数II・中間試験（11月15日)

ふりがな	
氏名	解答

学生番号	

1	
2	
3	
4	
5	
計	

問題 1 (20 点). $V_1 \subset \mathbb{R}^3$ を 1 次元部分空間、$V_2 \subset \mathbb{R}^3$ を 2 次元部分空間、$W = V_1 \cap V_2 \subset \mathbb{R}^3$ とする。次の命題の正誤を答えよ。

(1) W は空集合となることがある。

(2) W は一点となることがある。

(3) W は直線となることがある。

(4) W は平面となることがある。

(1) $\times$

(2) ◯

(3) ◯

(4) $\times$

問題 2 (20 点). $S \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分集合とする。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

次の各問いに答えよ。

(1) S は 1 次独立であることを示せ。

(2) $S \subset T$ を満たすような基底 $T \subset \mathbb{R}^3$ を一つ求めよ。ただし、解答には，求めた $T \subset \mathbb{R}^3$ が基底である理由を明記すること。

(1) 任意の 1 次関係

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$c_1 = 0$ と $c_2 = 0$ を得るため、$S \subset \mathbb{R}^3$ は 1 次独立であることが成り立つ。

(2) T を、

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると、T は 1 次独立である。なぜなら、

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のとき、必ず $c_1 = 0$、$c_2 = 0$、$c_3 = 0$ である。さらに、T の個数は $\mathbb{R}^3$ の次元と等しいため、T は $\mathbb{R}^3$ の基底であることが分かる。

問題 3 (20 点). $V \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分空間とする。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 + x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$F\colon V \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(1) V の基底 R を一つ求めよ。

(2) F の基底 $R \subset V$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。

(3) F の逆写像 F^{-1} の基本基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ と基底 $R \subset V$ に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$B = A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 4 (20 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ を基本基底、$R' \subset \mathbb{R}^3$, $S' \subset \mathbb{R}^2$ を次のように定める基底とする。

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ で定める線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) F の基底 $R \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $R \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 P を求めよ。

(3) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 Q を求めよ。

(4) F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\quad B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

問題 5 (20 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、次のように定義される線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を基本基底、$S' \subset \mathbb{R}^3$ を次のように定める基底とする。

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定める線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 S' と S に関する表現行列 P を求めよ。

(2) F の基底 S' と S' に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$