

練習問題その 1 (解答)

問題 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、 $W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ ため、命題 9 より、 $(W_1, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間である。

W_2 は、 $\mathbf{0}$ を含まないため、 $(W_2, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間ではない。

$(W_3, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間ではない。なぜなら、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3 \quad \text{であるが} \quad (-1)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3.$$

問題 2. W は空集合でないとき、ある $\mathbf{u} \in W$ がとれる。よって、性質 (iii) を用いて、

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in W$$

が成り立つ。

問題 3. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ に対して、命題 7 の性質 (i)—(iii) が成り立つことを示す。まず、 $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ を考える。

$$(i) \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

$$(ii) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3t_1 \\ 5t_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ 5t_2 \end{pmatrix} \in W_1 \quad \text{ならば} \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3t_1 \\ 5t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ 5t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 3(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in W_1$$

$$(iii) \quad a \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 5t \end{pmatrix} \in W_1 \quad \text{ならば} \quad a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} at \\ 3at \\ 5at \end{pmatrix} \in W_1$$

これで、 $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ が性質 (i)—(iii) を満たすことを示したため、命題 7 より、 $(W_1, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間であることを得る。続いて、 W_2 を考える。

$$(i) \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -0 \end{pmatrix} \in W_2$$

$$(ii) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} s_1 + t_1 \\ 3s_1 + 2t_1 \\ -s_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} s_2 + t_2 \\ 3s_2 + 2t_2 \\ -s_2 \end{pmatrix} \in W_2 \text{ ならば}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \\ 3(s_1 + s_2) + 2(t_1 + t_2) \\ -(s_1 + s_2) \end{pmatrix} \in W_2$$

$$(iii) a \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} s + t \\ 3s + 2t \\ -s \end{pmatrix} \in W_2 \text{ ならば } a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} as + at \\ 3as + 2at \\ -as \end{pmatrix} \in W_2$$

これで、 $W_2 \subset \mathbb{R}^3$ が命題 7 の性質定 (i)—(iii) を満たすことを示したので、 $(W_2, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間であることが分かる。

問題 4. $W \subset V$ に対して、命題 7 の性質 (i)—(iii) が成り立つことを示せばよい。

(i) 定款数 $f(x) = 0$ は、微分関数である。なぜなら、 $f'(x) = 0$ である。

(ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は微分関数のとき、 $f + g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ も微分関数である。なぜなら、 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ である。

(iii) $a \in \mathbb{R}$ 、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は微分関数のとき、 $af: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ も微分関数である。なぜなら、 $(af)'(x) = af'(x)$ のので、 $af: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である。

これで、 $W \subset V$ が、命題 7 の条件 (i)—(iii) を満たすことを示したため、 $(W, +, \cdot)$ は、 $(V, +, \cdot)$ の部分空間であることを得る。

注 5. 問題 4 に於けるベクトル空間 V と W は、無限次元ベクトル空間である。