

練習問題その 10 (解答)

問題 1. 与えられた写像 $\langle -, - \rangle$ が定義 1 の性質 (i)–(iv) を満たすことを示す。

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= (x_1 + x'_1)y_1 - (x_1 + x'_1)y_2 - (x_2 + x'_2)y_1 + 2(x_2 + x'_2)y_2 \\&= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x'_1y_1 - x'_1y_2 - x'_2y_1 + 2x'_2y_2 \\&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= ax_1y_1 - ax_1y_2 - ax_2y_1 + 2ax_2y_2 \\&= a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) \\&= a \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \\&= y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2 \\&= \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2x_2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\end{aligned}$$

問題 2. 三角不等式を用いて、

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$$

を得るため、

$$\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

が分かる。同様に、

$$\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

が成り立つので、

$$||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

を示した。

問題 3. (i) 任意の $w \in W$ に対して、 $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$ ため、 $\mathbf{0} \in W$ が分かる。 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W^\perp$ のとき、任意の $w \in W$ に対して、 $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0$ ため、 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W^\perp$ を得る。 $\mathbf{v} \in W^\perp$ と $a \in \mathbb{R}$ のとき、任意の $\mathbf{w} \in W$ に対して、 $\langle a\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ なので、 $a\mathbf{v} \in W^\perp$ が分かる。よって、 $W^\perp \subset V$ は部分空間であることが成り立つ。

(ii) $\mathbf{v} \in W \cap W^\perp$ のとき、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ため、 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が分かる。

問題 4. (1) $S(\theta, \varphi) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ の定義を思い出す。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

計算すると、

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$$

を得るので、 $S \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交であることが分かる。

(2) 補題 12 より、

$$c_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle = x_1 \cos \theta \cos \varphi + x_2 \sin \theta \cos \varphi + x_3 \sin \varphi$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

$$c_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_3 \rangle = -x_1 \cos \theta \sin \varphi - x_2 \sin \theta \sin \varphi + x_3 \cos \varphi$$