

練習問題その 1 1 (解答)

問題 1. A の固有多項式は、

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 3 \\ 3 & 5-t \end{pmatrix} \\ &= (-3-t)(5-t) - 9 = t^2 - 2t - 24 = (t-6)(t+4)\end{aligned}$$

であるため、 $\lambda_1 = 6$ と $\lambda_2 = -4$ は A の固有値である。定義より、 λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ は、連立 1 次方程式 $(A - \lambda_i E)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ のゼロでない解である。例として、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は、それぞれ λ_1 と λ_2 に属する固有ベクトルである。

問題 2. $\mathbf{a}_j$ を A の第 j 列とすると、

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = ({}^t A)A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

である。 $({}^t A)A = A^2 = O$ ため、任意の (i, j) に対して、 $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0$ を得る。特に、任意の i に対して、 $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle = 0$ が分かる。ゆえに、任意の i に対して、 $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ ため、 $A = O$ が成り立つ。

問題 3. (i) P は直交行列のとき、 $P^{-1} = {}^t P$ 、 ${}^t P$ も直交行列であるため、 P^{-1} も直交行列であることが分かる。

(ii) P, Q は直交行列であるため、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\|PQ\mathbf{x}\| = \|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

が分かる。ゆえに、 PQ も直交行列である。

問題 4. 例 7 を用いて、

$$(i) \Leftrightarrow P \text{ は直交行列} \Leftrightarrow {}^t P \text{ は直交行列} \Leftrightarrow (ii)$$

を得る。