

練習問題その 1 2 (解答)

問題 1. まず、(i) を仮定し、(ii) を示す。(i) より、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

で表されるため、

$$P^{-1}AP\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$$

が分かる。すなわち、

$$AP\mathbf{e}_j = P(\lambda_j\mathbf{e}_j) = \lambda_jP\mathbf{e}_j$$

を得る。 $P\mathbf{e}_j$ は P の第 j 列ベクトルなので、(ii) が成り立つ。

次に、(ii) を仮定し、(i) を示す。 P の列ベクトルは A の固有ベクトルであるため、任意の $1 \leq j \leq n$ に対して、

$$AP\mathbf{e}_j = \lambda_jP\mathbf{e}_j \quad (\lambda_j \in \mathbb{R})$$

が分かる。よって、任意の $1 \leq j \leq n$ に対して、

$$P^{-1}AP\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$$

を得る。すなわち、(i) が成り立つ。

問題 2. 以下の (1)–(4) で $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ を計算する。

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-t^2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \\ &= -(1-t)(1-t^2) = (1-t)^2(-1-t) \end{aligned}$$

ゆえに、 A の固有値は 1 と -1 であることを得る。

(2) 固有空間 $\ker(A - E)$ と $\ker(A + E)$ を計算する。 $A - \lambda E$ の簡約化を B_λ とおくと、

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。すなわち、

$$\begin{aligned} (A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0 \\ (A + E)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \ker(A - E) &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ \ker(A + E) &= \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

を得る。

(3) グラム・シュミットの正規直交化方を用いて、基底

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A - E) \\ S_{-1} &= \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A + E) \end{aligned}$$

の正規直交化 $T_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \ker(A - E)$ と $T_{-1} = \{\mathbf{u}_3\} \subset \ker(A + E)$ を計算する。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4) ゆえに、問題 1 より、正方行列

$$P = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすことが分かる。

問題 3. 以下の (1)–(4) で $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ を計算する。

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 - (1-t)(2-t) & -(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)(2-t) & -2(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 2-t & 2 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-(2-t)(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & t(3-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -t(1-t)(3-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -t(1-t)(3-t)
\end{aligned}$$

ゆえに、 A の固有値は $0, 1, 3$ であることを得る。

(2) 固有空間 $\ker(A - \lambda E)$ を計算する。 $A - \lambda E$ の簡約化を B_λ とおくと、

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - x_3 = 0 \\ & x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\
(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & + x_3 = 0 \\ & x_2 = 0 \end{cases} \\
(A - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - x_3 = 0 \\ & x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}\ker(A) &= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ \ker(A - E) &= \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \\ \ker(A - 3E) &= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

(3) グラム・シュミットの正規直交化法を用いて、基底

$$\begin{aligned}S_0 &= \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A), & S_1 &= \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A - E) \\ S_3 &= \left\{ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A - 3E)\end{aligned}$$

の正規直交基底 $T_0 = \{\mathbf{u}_1\}$, $T_1 = \{\mathbf{u}_2\}$, $T_3 = \{\mathbf{u}_3\}$ を計算する。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4) ゆえに、問題 1 より、正方行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を満たすことが分かる。

問題 4. $P^{-1}AP$ は対角行列 D と等しいことを示す直交行列 P が存在とき、

$${}^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^t(P^{-1}) {}^tD {}^tP = PDP^{-1} = A$$

が分かる。すなわち、 A は対称行列であることを示した。