練習問題その５ (解答)

問題 1. F は全単射なので、「$\mathbf{u} = \mathbf{v}$」と「$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v})$」は同値である。以下、$F^{-1}$ が定義 1 の性質 (1)–(2) を満たすことを示す。

(1) 「$F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2)$」と「$F(F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) = F(F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2))$」は同値である。ここで、$F(F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ で、F が線形写像であるため、

$$F(F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2)) = F(F^{-1}(\mathbf{u}_1)) + F(F^{-1}(\mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

である。よって、性質 (1) を示した。

(2) 「$F^{-1}(c\mathbf{u}) = cF^{-1}(\mathbf{u})$」と「$F(F^{-1}(c\mathbf{u}) = F(cF^{-1}(\mathbf{u}))$」は同値である。今、

$$F(F^{-1}(c\mathbf{u})) = c\mathbf{u} = cF(F^{-1}(\mathbf{u})) = F(cF^{-1}(\mathbf{u}))$$

であるので、性質 (2) が成り立つ。

問題 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 基底

$$R = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の表現行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の成分は、次の方程式で決定される。

$$\mathrm{id}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$$

$$\mathrm{id}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$$

よって、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

問題 4. 基底 R と S に含まれているベクトルを、

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると、表現行列 A の成分は、次の方程式で決定される。

$$F(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$
$$F(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$
$$F(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{13}\mathbf{v}_1 + a_{23}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

以上の連立 1 次方程式を解くと、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。