練習問題その８ (解答)

問題 1. 系 3 より、

$$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

となるような可逆行列 X と Y が存在する。ゆえに、

$${}^tY\,{}^tA\,{}^tX = {}^t(XAY) = {}^t\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,m-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$$

が分かる。よって、系 3 より、$\mathrm{rank}({}^tA) = r$ が成り立つ。

問題 2. 行基本変形と列基本変形を用いて、

$$E_{1,2}(-2)P_2(-\tfrac{1}{3})E_{2,1}(-4)AE_{1,3}(1)E_{2,3}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$X = E_{1,2}(-2)P_2(-\tfrac{1}{3})E_{2,1}(-4) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y = E_{1,3}(1)E_{2,3}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい。

問題 3. A、X と Y をそれぞれ問題 2 で定めた行列とする。このとき、$A' = {}^tA$ ため、$X' = {}^tY$ と $Y' = {}^tX$ とすると、

$$X'A'Y' = {}^tY\,{}^tA\,{}^tX = {}^t(XAY) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。