

## 幾何学II／幾何学概論II：レポート問題その1

11月3日17:00までに理1号館105号室で出して下さい。

**問題 1.** (1) 次のように定める線形写像は、同型であることを示せ。

$$i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Alt}^1(\mathbb{R}^3), \quad i(w)(v) = \langle w, v \rangle$$
$$j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3), \quad j(w)(v_1, v_2) = \det(w, v_1, v_2)$$

ここで、 $\langle -, - \rangle$  は、 $\mathbb{R}^3$  の標準内積である。

(2) 任意の  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  に対して、

$$i(v_1) \wedge i(v_2) = j(v_1 \times v_2)$$

であることを示せ。ここで、 $- \times -$  とは、 $\mathbb{R}^3$  のクロス積である。

**問題 2.** 線形写像  $f: V \rightarrow W$  と交代式  $\omega_1 \in \text{Alt}^p(W)$ 、 $\omega_2 \in \text{Alt}^q(W)$  に対して、

$$\text{Alt}^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \text{Alt}^p(f)(\omega_1) \wedge \text{Alt}^q(f)(\omega_2)$$

を示せ。

**問題 3.**  $V$  を有限次元  $n$  ベクトル空間、 $\langle -, - \rangle$  をその内積、 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$  を正規直交基底とする。

(1) 次のように定める線形写像は同型であることを示せ。

$$i: V \rightarrow \text{Alt}^1(V), \quad i(v)(w) = \langle v, w \rangle$$

(ヒント： $i(b_j) = b_j^*$  を示せばよい。ここで、 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \text{Alt}^1(V)$  は反対基底である。)

与えられた  $V$  上内積  $\langle -, - \rangle$  は、次のように定める  $\text{Alt}^p(V)$  上内積  $\langle -, - \rangle_p$  を誘導する。

$$\left\langle \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*, \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda'_\sigma b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \right\rangle_p = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma \lambda'_\sigma$$

誘導された内積  $\langle -, - \rangle_p$  ( $p \geq 1$ ) に対して、以下の性質 (2)–(3) を示せ。

(2) 任意の  $v, w \in V$  に対して、

$$\langle i(v), i(w) \rangle_1 = \langle v, w \rangle$$

である。

(3) 任意の  $\omega_1, \dots, \omega_p, \tau_1, \dots, \tau_p \in \text{Alt}^1(V)$  に対して、

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \tau_1 \rangle_1 & \cdots & \langle \omega_1, \tau_p \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_p, \tau_1 \rangle_1 & \cdots & \langle \omega_p, \tau_p \rangle_1 \end{pmatrix}$$

である。