幾何学 II/幾何学概論 II：レポート問題その 2

12 月 2 日 17:00 までに理 1 号館 105 室で出して下さい。

問題 **1.** 内積 $\langle -, - \rangle$ つき有限次元 n 実ベクトル空間 V をおいておき、レポート問題その 1 で勉強した、$\mathrm{Alt}^p(V)$ 上誘導された内積 $\langle -, - \rangle_p$ を想起する。特に、1 次元ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^n(V)$ の内積 $\langle -, - \rangle_n$ に対して、$\langle \mathrm{vol}, \mathrm{vol} \rangle_n = 1$ を満たす元 $\mathrm{vol} \in \mathrm{Alt}^n(V)$ をとる。

(1) 次の性質を持つ線形写像 $*\colon \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$ は、ただ一つが存在することを示せ。「任意の $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$、$\tau \in \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$ に対して、

$$\langle *\omega, \tau \rangle_{n-p} \, \mathrm{vol} = \omega \wedge \tau$$

である。」(線形写像 $*$ は、ホッジの $*$ 演算子と呼ばれる。)

(2) $\mathrm{vol}(b_1, \ldots, b_n) = 1$ を満たす正規直交基底 $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset V$ とその反対基底 $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^1(V)$ において、任意の $0 \leqslant p \leqslant n$ に対して、

$$*(b_1^* \wedge \cdots \wedge b_p^*) = b_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge b_n^*$$

であることを示せ。

(3) 任意の $0 \leqslant p \leqslant n$、$\sigma \in S_{p,n-p}$ に対して、

$$*(b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*) = \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(n)}$$

であることを示せ。

(4) 任意の $0 \leqslant p \leqslant n$ に対して、

$$* \circ * = (-1)^{p(n-p)}\colon \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^p(V)$$

であることを示せ。