幾何学 II / 幾何学概論 II：レポート問題その 3

12 月 1 日 17:00 までに理 1 号館 105 号室で出して下さい。

問題 1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、次のように定める微分形式 $dx_i \in \Omega^1(U)$ を思い出す。

$$dx_i(x)(v) = e_i^*(v) = v_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

ただし、$x \in U$、$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ である。さらに、

$$\mathrm{vol} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$$

とする。このとき、次のように定める線形写像を考える。

$$*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U), \qquad (*\omega)(x) = *(\omega(x))$$

ここで、右辺の $*\colon \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(\mathbb{R}^n)$ は、

$$\mathrm{vol}(x) = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \in \mathrm{Alt}^n(\mathbb{R}^n)$$

に関するホッジの $*$ 演算子である。線形写像 $*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ もホッジの $*$ 演算子と呼ばれ、レポート問題 2 より、次の性質 (i)–(ii) を満たす。

(i) 任意の $0 \leqslant p \leqslant n$、$\sigma \in S_{p,n-p}$ に対して、

$$*(dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) dx_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)}$$

である。

(ii) 任意の $0 \leqslant p \leqslant n$ に対して、

$$* \circ * = (-1)^{p(n-p)}$$

である。

今回、次のように定める線形写像 $d^*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ を考える。

$$d^* = (-1)^{np+n-1} * \circ\, d \circ *$$

この写像について、次の命題 (1)–(3) を示せ。

(1) 合成写像 $d^* \circ d^*$ は、ゼロ写像と等しい。

(2) 任意の $f \in \Omega^0(U)$ に対して、

$$d^*(f \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = \sum_{s=1}^{p} (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_s} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{s-1} \wedge dx_{s+1} \wedge \cdots \wedge dx_p$$

である。

(3) 任意の $f \in \Omega^0(U)$ と $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ に対して、

$$d^*(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \sum_{s=1}^{p} (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{s-1}} \wedge dx_{i_{s+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

である。

問題 2. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ において、次のように定める線形写像は、ラプラス演算子とよばれる。

$$\Delta\colon \Omega^p(U) \to \Omega^p(U), \qquad \Delta = d \circ d^* + d^* \circ d$$

ただし、$d^*\colon \Omega^q(U) \to \Omega^{q-1}(U)$ は、問題 1 で勉強した演算子である。$\Delta(\omega) = 0$ を満たす $\omega \in \Omega^p(U)$ は、**調和形式**と呼ばれる。次の命題を示せ。

(1) 任意の $f \in \Omega^0(U)$、$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ に対して、

$$\Delta(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = -\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Big) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

である。

(2) ホッジの演算子 $*\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{n-p}(U)$ は、調和形式を保つ。すなわち、任意の $\omega \in \Omega^p(U)$ に対して、$\Delta(\omega) = 0$ なら、$\Delta(*\omega) = 0$ が成り立つ。