幾何学概論：レポート問題２の答え

有限次元 n の実ベクトル空間 V とその基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ に対して、定理3.5より、反対基底 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^1(V)$ は、反対ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^1(V)$ の基底となる。反対基底 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \mathrm{Alt}^p(V)$ は、次のように定義された内積 $\langle -, - \rangle_1$ によって、正規直交基底である。

$$\langle \lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*, \lambda_1' b_1^* + \cdots + \lambda_n' b_n^* \rangle_1 = \lambda_1 \lambda_1' + \cdots + \lambda_n \lambda_n'$$

同様に、定理 3.5 より、次の部分集合は、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$ の基底となる。

$$\{b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \mid \sigma \in S_{p,n-p}\} \subset \mathrm{Alt}^p(V)$$

この基底は、次のように定義された内積 $\langle -, - \rangle_p$ によって、正規直交基底である。

$$\Big\langle \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*, \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma' b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \Big\rangle_p = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma \lambda_\sigma'$$

この内積について、任意の $\omega_1, \dots, \omega_p, \tau_1, \dots, \tau_p \in \mathrm{Alt}^1(V)$ に対して、次の方程式を示す。

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_1, \tau_p \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_p, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_p, \tau_p \rangle_1 \end{pmatrix}$$

この方程式の両辺は、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^1(V)$ 上 $2p$ 重線形形式である。よって、ω_i, τ_j は反対基底のベクトルであるときを考えばよい。このとき、それぞれの外積と行列式の性質より、次の公式が成り立つ。

$$\langle b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_p}^*, b_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{j_p}^* \rangle_p = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}) \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \langle b_{i_1}^*, b_{j_1}^* \rangle_1 & \dots & \langle b_{i_1}^*, b_{j_p}^* \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_{i_p}^*, b_{j_1}^* \rangle_1 & \dots & \langle b_{i_p}^*, b_{j_p}^* \rangle_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}) \end{cases}$$

ここで、$\sigma \in S_p$ は「$\sigma(i_s) = j_s$」で定義された置換である。よって、以上の方程式が成り立つ。