幾何学 I / 幾何学概論 V：レポート問題 3 の答え

次のように定義された写像 $\varphi\colon \Omega^1(U) \to C^\infty(U,\mathbb{R}^2)$ と $\psi\colon \Omega^2(U) \to C^\infty(U,\mathbb{R})$ をおいておく。

$$\varphi(g_1 \wedge dx_1 + g_2 \wedge dx_2) = g$$
$$\psi(h \wedge dx_1 \wedge dx_2) = h$$

ここで、$g_1, g_2, h\colon U \to \mathbb{R}$ は滑らかな写像であり、$g\colon U \to \mathbb{R}^2$ は「$g(x) = (g_1(x), g_2(x))$」で定義された写像である。写像 φ と ψ の逆写像は、次のように定義できる。

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(g) &= g_1 \wedge dx_1 + g_2 \wedge dx_2\\ \psi^{-1}(h) &= h \wedge dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

ここで、$g = (g_1, g_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ 及び $h\colon U \to \mathbb{R}$ は滑らかな写像である。よって、写像 φ と ψ は同型であることが分かる。最後に、次の図式が可換になることを示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"] & \Omega^2(U) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & C^\infty(U),\mathbb{R}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

次の計算は、左の正方形が可換になることを示す。

$$(\varphi \circ d)(f) = \varphi(df) = \varphi\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \wedge dx_2\Big) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) = \mathrm{grad}(f)$$

同様に、次の計算は、右の正方形が可換になることを示す。

$$\begin{aligned}
&(\psi \circ d)(g_1 \wedge dx_1 + g_2 \wedge dx_2) = \psi(dg_1 \wedge dx_1 + dg_2 \wedge dx_2)\\
&= \psi\Big(\big(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \wedge dx_2\big) \wedge dx_1 + \big(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \wedge dx_2\big) \wedge dx_2\Big)\\
&= \psi\Big(\big(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\big) \wedge dx_1 \wedge dx_2\Big) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\
&= \mathrm{rot}(g_1, g_2) = (\mathrm{rot} \circ \varphi)(g_1 \wedge dx_1 + g_2 \wedge dx_2)
\end{aligned}$$