幾何学 I / 幾何学概論 V：レポート問題 4 の答え

交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$ において、次のように定義された写像 $f_\omega\colon \mathrm{Alt}^{n-p}(V) \to \mathbb{R}$ を考える。

$$\omega \wedge \tau = f_\omega(\tau)\,\mathrm{vol}$$

外積の性質より、写像 f_ω は線形写像であることが分かる。よって、次の性質を満たす交代式 $*\omega \in \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$ は一意存在することが分かる。

$$f_\omega(\tau) = \langle *\omega, \tau \rangle$$

それで、このように定義された写像

$$*\colon \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$$

は線形写像であることを示す。まず、任意の $\omega, \omega' \in \mathrm{Alt}^p(V)$ と $\tau \in \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle *(\omega + \omega'), \tau \rangle \,\mathrm{vol} &= (\omega + \omega') \wedge \tau = \omega \wedge \tau + \omega' \wedge \tau = \langle *\omega, \tau \rangle \,\mathrm{vol} + \langle *\omega', \tau \rangle \,\mathrm{vol} \\ &= (\langle *\omega, \tau \rangle + \langle *\omega', \tau \rangle) \,\mathrm{vol} = \langle *\omega + *\omega', \tau \rangle \,\mathrm{vol} \end{aligned}$$

なので、

$$\langle *(\omega + \omega'), \tau \rangle = \langle *\omega + *\omega', \tau \rangle$$

であることが分かる。よって、

$$\langle *(\omega + \omega') - *\omega - *\omega', \tau \rangle = 0$$

であることが分かる。特に、$\tau = *(\omega + \omega') - *\omega - *\omega'$ のとき、

$$\| * (\omega + \omega') - *\omega - *\omega' \|^2 = 0$$

が成り立つ。よって、

$$*(\omega + \omega') = *\omega + *\omega'$$

であることが成り立つ。同様に、$*(\lambda\omega) = \lambda(*\omega)$ が成り立つ。よって、

$$*\colon \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$$

は、うまく定義された線形写像であることを示した。

(2) 与えられた正規直交基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ に対して、

$$\{b^*_{\tau(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\tau(n)} \mid \tau \in S_{p,n-p}\} \subset \mathrm{Alt}^{n-p}(V)$$

は正規直交基底となる。それに対して、

$$b^*_1 \wedge \cdots \wedge b^*_p \wedge b^*_{\tau(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\tau(n)} = \begin{cases} \mathrm{vol} & (\tau = \mathrm{id}) \\ 0 & (\tau \neq \mathrm{id}) \end{cases}$$

なので、方程式

$$*(b^*_1 \wedge \cdots \wedge b^*_p) = b^*_{p+1} \wedge \cdots \wedge b^*_n$$

が成り立つ。

(3) 一般的に、$\sigma \in S_{p,n-p}$ のとき、

$$b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)} \wedge b^*_{\tau(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\tau(n)} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{vol} & (\tau = \sigma) \\ 0 & (\tau \neq \sigma) \end{cases}$$

である。よって、

$$*(b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) b^*_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(n)}$$

であることが分かる。

(4) 次のように定義された置換 $\tau \in S_n$ をおいておく。

$$\tau(i) = \begin{cases} i + p & (1 \leqslant i \leqslant n - p) \\ i - n + p & (n - p + 1 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

このとき、写像「$\sigma \mapsto \sigma\tau$」は全単射 $S_{p,n-p} \to S_{n-p,p}$ を定義する。よって、(3) より、

$$\begin{aligned} &* \left(*(b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)})\right) = *(\mathrm{sgn}(\sigma) b^*_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) * (b^*_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(n)}) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) * (b^*_{\sigma\tau(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma\tau(n-p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma\tau) b^*_{\sigma\tau(n-p+1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma\tau(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\tau) b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)} = (-1)^{p(n-p)} b^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge b^*_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

であることが分かる。