1 写像

定義 **1.** 写像 $f\colon A \to B$ とは、集合 A と B と任意の $a \in A$ を $f(a) \in B$ に対応させるルール f を合わせたものである。集合 A は写像 $f\colon A \to B$ の定義域と呼ばれ、集合 B は写像 $f\colon A \to B$ の値域と呼ばれる。

写像 $f\colon A \to B$ も $A \xrightarrow{f} B$ と書く。

例 2. 次の三つの写像は互いに違う写像である。

$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \\
&g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), \quad g(x) = x^2 \\
&h\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad h(x) = x^2
\end{aligned}
$$

例 3. 微分法も次のような写像である。

$$
\begin{array}{ccc}
\{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ は微分可能である}\} & \longrightarrow & \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\
F & \longmapsto & F'
\end{array}
$$

定義 **4.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。

(1) 任意の $b \in B$ について、ある $a \in A$ に対して、$b = f(a)$ であるとき、写像 $f\colon A \to B$ は全射と呼ばれる。

(2) 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して、「$f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$」のとき、写像 $f\colon A \to B$ は単射と呼ばれる。

(3) 写像 $f\colon A \to B$ は全射で単射でもあるとき、全単射と呼ばれる。

注 5. 「$f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$」と「$a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$」は同値である。

例 6. 例 2 では、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない、$g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ は全射であり単射でない、$h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ は全単射である。

定義 **7.** 写像 $f\colon A \to B$ について、部分集合

$$
f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset B
$$

は写像 $f\colon A \to B$ の像と呼ばれる。

注 8. 写像 $f\colon A \to B$ は全射であることとその像 $f(A)$ が集合 B の全体であることは同値である。

例 9. 例 2 では、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$、$h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ は、全て同じ像 $[0,\infty)$ を持つ。例 3 で定義された写像の像は次の部分集合と等しい。

$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は原始関数を持つ}\} \subset \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

定義 **10.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。部分集合 $V \subset B$ の f による逆像は、

$$f^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) \in V\} \subset A$$

で定義された A の部分集合である。部分集合 $V \subset B$ はただ一つの元 $b \in B$ からなるとき、逆像 $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{b\}) \subset A$ も $f^{-1}(b)$ 表す。

注 11. 唯一つの元からなる部分集合 $\{b\} \subset B$ の場合には、逆像 $f^{-1}(\{b\})$ も $f^{-1}(b)$ と表し、次のように与えられている。

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subset A$$

ただし、逆像 $f^{-1}(b)$ は集合 A の部分集合であり、集合 A の元ではない。

例 12. 例 2 で定義された写像のとき、唯一つの元からなる部分集合の逆像は次のように与えられている。

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \\ \emptyset & (y < 0) \end{cases}$$

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \end{cases}$$

$$h^{-1}(y) = \{\sqrt{y}\}$$

補題 **13.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。

(1) 任意の部分集合 $V \subset B$ に対して、$f(f^{-1}(V)) \subset V$

(2) 任意の部分集合 $U \subset A$ に対して、$f^{-1}(f(U)) \supset U$

証明(1) $f(f^{-1}(V)) = \{f(a) \mid a \in f^{-1}(V)\} = \{f(a) \mid f(a) \in V\} \subset V$

(2) $f^{-1}(f(U)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(U)\} \supset U$

定義 **14.** 写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ において、次のように定義された写像 $g \circ f\colon A \to C$ は写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成写像と呼ばれる。

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

次の図式を見ると以上の定義がすぐ分かる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

補題 **15.** (1) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全射である。

(2) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も単射である。

(3) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全単射である。

証明 (1) 合成写像 $g \circ f\colon A \to C$ の像は C であることを示せばよい。

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

(2) 「$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$」を満たす元 $a_1, a_2 \in A$ をおいおく。$a_1 = a_2$ であることを示せばよい。まず、合成写像の定義より $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ であることが分かる。それに、$g\colon B \to C$ は単射なので、$f(a_1) = f(a_2)$ であることが分かる。最後に、$f\colon A \to B$ も単射なので、$a_1 = a_2$ であることが分かる。よって、$g \circ f\colon A \to C$ は単射であることを示した。
(3) は (1) と (2) から分かる。