10　行列式の定義

今回も、正方行列しか考えない。

定義 **1.** 帰納法を用いて、n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式（determinant）は、次のように定義される。まず、$n = 1$ のとき、

$$\det(A) = a_{11}$$

と定義される。それから、$n - 1$ 次の正方行列の行列式が定義されているとし、n 次の正方行列の行列式は、次の公式で定義される。

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

ここで、A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n - 1$ 次の正方行列である。

注 2. 正方行列 A の行列式は、$|A|$ とも書かれる。

例 3. $n = 2$ のとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22})$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21})$$

なので、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) \\ &= a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

となる。

例 4. $n = 3$ のとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

となる。

例 5. 次の行列式を計算してみる。

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot 8 - 1\cdot 0 + 3\cdot(-6) \\ &= -2 \end{aligned}$$

定義 1 でおける公式は、「第 1 行で展開された行列式」と呼ばれる。次の定理より、第 i 行で展開された行列式または第 j 列で展開された行列式は、同じ結果を与える。

定理 **6.** n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) (第 i 行で展開された行列式)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(2) (第 j 列で展開された行列式)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

注 7. 定理 6 における符号 $(-1)^{i+j}$ は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

系 **8.** n 次の正方行列 A において、

$$\det({}^{t}A) = \det(A)$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$n = 1$ のとき、系は自明なので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。転置行列の定義より、${}^{t}A$ の (i, j) 成分と A の (j, i) 成分は等しい、$({}^{t}A)_{ij}$ と ${}^{t}(A_{ji})$ は等しいことが分かる。従って、行列式の定義より、転置行列の行列式は、次のように表される。

$$\det({}^{t}A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det({}^{t}(A_{j1}))$$

今、帰納法の仮定より、$\det({}^{t}(A_{j1})) = \det(A_{j1})$ なので、

$$\det({}^{t}A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det(A_{j1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

が得る。右辺は、行列 A の第 1 列で展開された行列式なので、定理 6 より、右辺は $\det(A)$ であることが分かる。すなわち、$\det({}^{t}A) = \det(A)$ が成り立つ。帰納法より、任意の自然数 n に対して、系は正しい。 $\square$

例 9. 第 2 行で展開し、例 5 における行列式を、もう一回計算してみる。

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 2\cdot(8-9) = -2$$

例 10. 次の行列 A の行列式 $\det(A)$ を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

第 3 列には、0 を 2 個あるので、第 3 列で展開して計算する。

$$\begin{aligned}\det(A) &= -2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\\ &= -2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

行列式 $\det(A_{23})$ と $\det(A_{33})$ を、それぞれ第 1 列と第 2 行で展開して計算する。

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix} &= 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot(-13) + 3\cdot(-11)\\ &= -59\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} &= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-15) \\
&= -27
\end{aligned}
$$

よって、

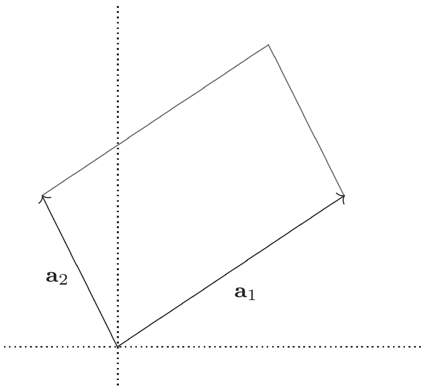
$$\det(A) = -2 \cdot (-59) + 1 \cdot (-27) = 91$$

が得る。

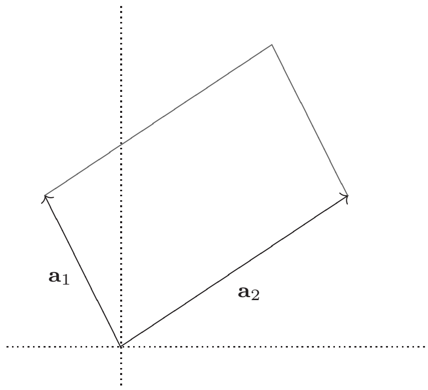
例 11 (行列式の幾何的な記述). $n = 2$ のとき、

$$|\det(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2)| = \text{ベクトル } \mathbf{a}_1 \text{ と } \mathbf{a}_2 \text{ で定義された平行四辺形の面積}$$

である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2)$ の符号は、次のように与えられる。



$\det(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2) > 0$

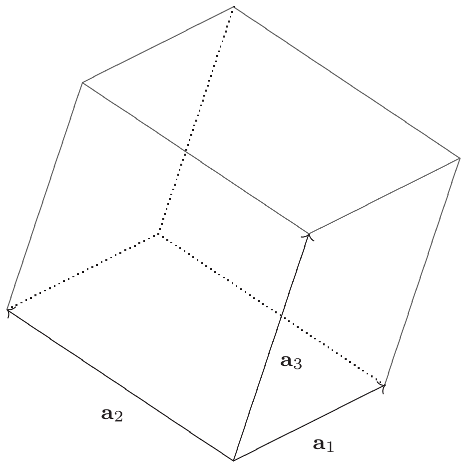


$\det(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2) < 0$

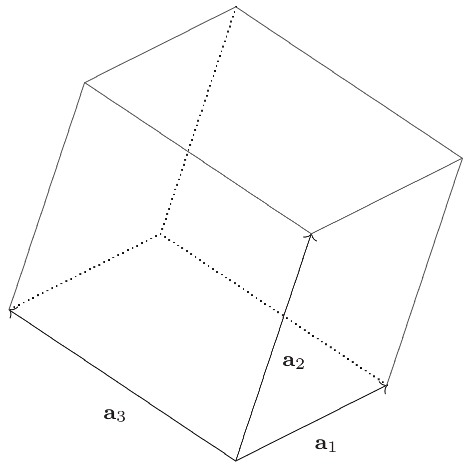
同様に、$n = 3$ のとき、

$$|\det(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{a}_3)| = \text{ベクトル } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ と } \mathbf{a}_3 \text{ で定義された平行六面体の体積}$$

である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3)$ の符号は、次のように与えられる。



$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3) > 0$



$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3) < 0$

命題 **12.** 単位行列 E_n の行列式は、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$n = 1$ のとき、$\det(E_1) = 1$ なので、命題は自明なので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。しかし、定義 1 より、

$$\det(E_n) = 1 \cdot \det((E_n)_{11}) = 1 \cdot \det(E_{n-1}) = 1$$

であることが分かる。帰納法より、任意の n に対して、命題は正しい。 □