11　行列式の性質

定理 **1.** 次の性質 (1)—(4) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1 \leqslant j \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(2) 任意の $1 \leqslant j \leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & s\mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = s\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\ \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k \quad \text{ならば} \quad \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = 0\ 」$$

が成立する。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

定理 1 を証明する前に、次の補題を示す。

補題 **2.** 定理 1 の性質 (1)—(3) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

に対して、次の性質 (i)—(ii) が成り立つ。

(i) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。

(ii) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ とスカラー s に対して、

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & s\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。

証明. 性質 (1) と (3) を用いて (i) は、次の計算から成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} 0
\end{aligned}$$

続いて、性質 (1)—(3) を用いて、

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & s\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} + s\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} \\
&\overset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得る。同様に、

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & s\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

定理 1 の証明. 最初に、帰納法を用いて、性質 (1)—(4) を満たす写像の一意性を示す。まず、$n=1$ のとき、

$$\det(a_{11}) = \det(a_{11}\cdot 1) \overset{(2)}{=} a_{11}\cdot\det(1) \overset{(4)}{=} a_{11}\cdot 1 = a_{11}$$

が得るので、$n=r-1$ のときは正しいと仮定し、$n=r$ のときを示せばよい。今、

$$\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{r1}\mathbf{e}_r$$

なので、性質 (1)—(2) から、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} a_{i1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、次の等式 3 を示せばよい。

$$(-1)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \det(A_{i1}) \tag{3}$$

このために、補題 2 を用いて、等式 (3) の左辺を次のように表す。

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 - a_{i2}\mathbf{e}_i & \cdots & \mathbf{a}_r - a_{ir}\mathbf{e}_i\end{pmatrix} = \det(\tilde{A}_{i1})$$

ここで、$r-1$ 次の正方行列 B において、$\tilde{B}$ は、次の r 次の正方行列である。

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{i-1,1} & \cdots & b_{i-1,r-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{i,1} & \cdots & b_{i,r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{r-1,1} & \cdots & b_{r-1,r-1} \end{pmatrix}$$

今、$D(B) = (-1)^{i+1}\det(\tilde{B})$ で定義された写像 $D\colon M_{r-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、性質 (1)—(4) を満たすので、帰納法の仮定より、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。よって、等式 (3) が成り立つ。これで、性質 (1)—(4) を満たす写像の一意性を示した。

続いて、帰納法を用いて、定義 10.1 で定義された写像 $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、性質 (1)—(4) を満たすことを示す。$n=1$ のときは自明なので、$n=r-1$ のときは正しいと仮定し、$n=r$ のときを示せばよい。定義 10.1 より、r 次の正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{h=1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det(A_{1h})$$

である。r 次の列ベクトル $\mathbf{a}$ において、$\hat{\mathbf{a}}$ を次の $r-1$ 次の列ベクトルとする。

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

今、性質 (1) は、次の計算から成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}(x_j+y_j)\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}x_j\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}y_j\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

性質 (2) は、同様に示される。

次に、性質 (3) を示す。まず、$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j+1}$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\\
&\quad + (-1)^{1+j}a_{1j}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix}\\
&\quad + (-1)^{1+j+1}a_{1,j+1}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix}\\
&\quad + \sum_{h=j+2}^{n}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が消えている。なぜなら、右辺の第 2 行と第 3 行は逆になって、帰納法の仮定より、第 1 行と第 2 行が消えている。今、補題 2 の証明は、任意の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \mathbf{a}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_{j+1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix}$$

であることを示す。一般的に、ある $1 \leqslant j < k \leqslant n$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{k-j-1}\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得る。特に、$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ のとき、

$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix} = 0$$

であることが分かる。よって、性質 (3) を示した。

性質 (4) は、命題 10.12 で示したので、定理が成り立つ。 □

定理 **4.** n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) （第 i 行で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

(2) （第 j 列で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

証明. (1) 定理 1 の証明と同じように、第 i 行で展開された行列式

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

は、定理 1 の性質 (1)—(4) を満たすことが示せる。よって、一意性より、

$$D(A) = \det(A)$$

であることが分かる。

(2) 補題 2 の (i) より、$j = 1$ を仮定すればよい。このとき、示したい等式

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

は、定理 1 の証明における等式 (3) から成り立つ。 □

定理 **5.** n 次の正方行列 A と B に対して、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

である。

証明. $\det(A) \neq 0$ のとき、$D(B) = \det(AB)/\det(A)$ で定義された写像 $D\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、定理 1 の性質 (1)—(4) を満たすので、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。

$\det(A) = 0$ のとき、$D(B) = \det(B) - \det(AB)$ で定義された写像 $D\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、定理 1 の性質 (1)—(4) を満たすので、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。 □

注 6. 特に、$\det(AB) = \det(BA)$ である。

正方行列 A において、その行基本変形を思い出す。

(1) 行列 $P_i(s)A$ は、行列 A の第 i 行を s 倍（$s \neq 0$）とした行列である。

(2) 行列 $T_{i,j}A$ は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である。

(3) 行列 $E_{i,j}(s)A$ は、行列 A の第 i 行に第 j 行（$i \neq j$）の s 倍を加えた行列である。

練習問題その１０の問題３で、$\det(P_i(s)) = s$、$\det(T_{i,j}) = -1$ と $\det(E_{i,j}(s)) = 1$ を示したので、定理 5 を用いて、次の結果が成り立つ。

定理 7. 正方行列 A において、次の性質 (1)—(3) が成り立つ。

(1) $\det(P_i(s)A) = s\det(A)$

(2) $\det(T_{i,j}A) = -\det(A)$

(3) $\det(E_{i,j}(s)A) = \det(A)$

練習問題その１０の問題２で、次の結果を示した。

命題 8. n 次の三角行列 A に対して、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

である。

定理 7 と命題 8 を使うと、行列式の計算が、より簡単に計算できる。

例 9. (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad ① と ③ を入れ替えた$$
$$= -3\cdot(-5)\cdot 4 = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -56 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ ② + ① \times (-2) \\ ③ + ① \times (-4) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 28 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ ③ + ② \times (-\frac{7}{3}) \end{matrix}$$
$$= 2\cdot(-24)\cdot 28 = 2^6\cdot 3\cdot 7 = 1344$$

$$
(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-1) \\ ④ + ① \\ ⑤ + ① \times (-1) \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ③ \times (-1) \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ④ \times (-1) \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ② \times (-1) \end{array}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad ② \text{ と } ③ \text{ を入れ替え}
$$

$$
= -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) = 2^4 = 16.
$$