12　行列式の性質（復習）・クラーメルの公式

行列式とその性質を復習する。n 次の正方行列 A の行列式 $\det(A)$ は、帰納法を用いて次のように定義される。$n=1$ のとき、$\det(A)=a_{11}$ で、$n>1$ のとき、

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) \tag{1}$$

である。ただし、A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次の正方行列である。公式 (1) は、第 1 行で展開された行列式と呼ばれる。行列の各性質は、次の定理から成り立つ。

定理 **2** (行列式の基本定理)**.** 次の性質 (1)—(4) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1\leqslant j\leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\\ &=\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(2) 任意の $1\leqslant j\leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & s\mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=s\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1\leqslant j<k\leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\ \mathbf{a}_j=\mathbf{a}_k \quad \text{ならば} \quad \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=0\ 」$$

が成立する。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n)=1$$

である。

例 3. 行列 $2A$ は、行列 A の各列を 2 倍とした行列なので、

$$\det(A+A)=\det(2A)=2^n\det(A)$$

が得る。

例 3 より、一般的に、$\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$ である。一方、定理 2 から、次の結果が成り立つ。

定理 **4.** n 次の正方行列 A と B に対して、次の性質 (1)–(2) が成り立つ。

(i) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

(ii) $\det({}^tA)=\det(A)$

注 5. 定理 2 の性質 (1)–(3) と定理 4 の性質 (ii) から、次の性質 (1')–(3') が成り立つ。

(1) 任意の $1\leqslant i\leqslant n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i-1}\\ \mathbf{x}+\mathbf{y}\\ \mathbf{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i-1}\\ \mathbf{x}\\ \mathbf{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i-1}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(2) 任意の $1\leqslant i\leqslant n$、行ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i-1}\\ s\mathbf{x}\\ \mathbf{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=s\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{i-1}\\ \mathbf{x}\\ \mathbf{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1 \leqslant i < j \leqslant n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j \qquad \text{ならば} \qquad \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0」$$

が成立する。

行列式の基本定理 2 から、次の便利な結果も成り立つ。

定理 6. n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) （第 i 行で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

(2) （第 j 列で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

例 7 (三角行列の行列式). 次の性質を満たす正方行列 A は、上三角行列と呼ばれる。

$$i > j \qquad \text{ならば} \qquad a_{ij} = 0$$

転置行列 ${}^tA$ は上三角行列である行列 A は、下三角行列と呼ばれ、A または ${}^tA$ は上三角行列である行列 A は、三角行列と呼ばれる。定理 6 より、三角行列 A に対して、行列式 $\det(A)$ は、A の対角の各成分の積と等しい。すなわち、A は n 次の三角行列のとき、

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

である。

次の便利な定理も、行列式の基本定理から成り立つ。

定理 **8.** 正方行列 A において、次の性質 (1)—(3) が成り立つ。

(1) 行列 B は、行列 A の第 i 行を s 倍した行列とすると、

$$\det(B) = s\det(A)$$

である。

(2) 行列 B は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列とすると、

$$\det(B) = -\det(A)$$

である。

(3) 行列 B は、行列 A の第 i 行に第 j 行（$i \neq j$）の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(B) = \det(A)$$

である。

同様に、次の性質 $(1')$—$(3')$ が成り立つ。

(1') 行列 C は、行列 A の第 j 列を s 倍した行列とすると、

$$\det(C) = s\det(A)$$

である。

(2') 行列 C は、行列 A の第 j 列と第 k 列を入れ替えた行列とすると、

$$\det(C) = -\det(A)$$

である。

(3') 行列 C は、行列 A の第 j 列に第 k 列（$j \neq k$）の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(C) = \det(A)$$

である。

定理 8 と例 7 を用いて、行列式を簡単に計算することがよくある。

例 9. 次の行列式を計算してみる。

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と第 5 行を入れ替えた}
$$

$$
= + \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行と第 4 行を入れ替えた}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列と第 4 列を入れ替えた}
$$

$$
= -8 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 3
$$

$$
= 2^6 \cdot 3 = 192
$$

定理 8 を用いて、次の定理を示す。

定理 10. n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\operatorname{rank}(A) = n$

(ii) $\det(A) \neq 0$

証明. 行列 A の簡約化を B とする。定理 8 より、$\det(A) \neq 0$ と $\det(B) \neq 0$ は同値であることが分かる。簡約化 B は三角行列なので、$\det(B) \neq 0$ と $B = E_n$ は同値である。また、階数の定義より、$B = E_n$ と $\operatorname{rank}(A) = n$ は同値なので、定理を証明した。 □

定理 **11** (クラーメルの公式)**.** n 次の正則行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

において、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}$$

証明. 列ベクトル $\mathbf{x}$ が連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることと列ベクトル $\mathbf{b}$ が次の 1 次結合と表されることは同値である。

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

従って、定理 2 の性質 (1)–(2) より、次の等式が得る。

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

さらに、定理 2 の性質 (3) より、$j \neq i$ のとき、右辺の第 j 項はゼロなので、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = x_i \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

例 12. クレーメルの公式を用いて、次の連立 1 次方程式を問いでみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

まず、定理 8 と例 7 より、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

が得る。同様に、次の行列式を計算する。

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 7 = 7$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 = 9$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 = 9$$

よって、クレーメルの公式より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 5/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

が得る。ただし、同じ答えがより簡単に掃き出し法で得る。