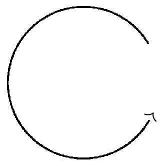
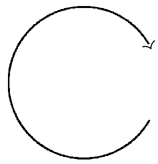
3　線形写像

まず、角について復習する。

- 反時計まわりを基本とする。

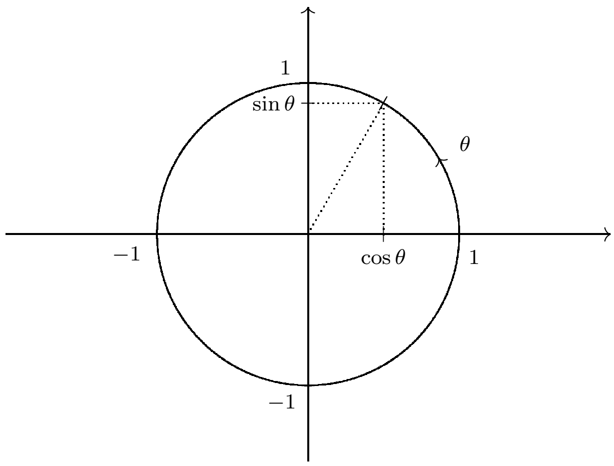


反時計まわり＝基本
counter-clockwise



時計まわり
clockwise

- 角をはかるときはラジアンを単位とする。

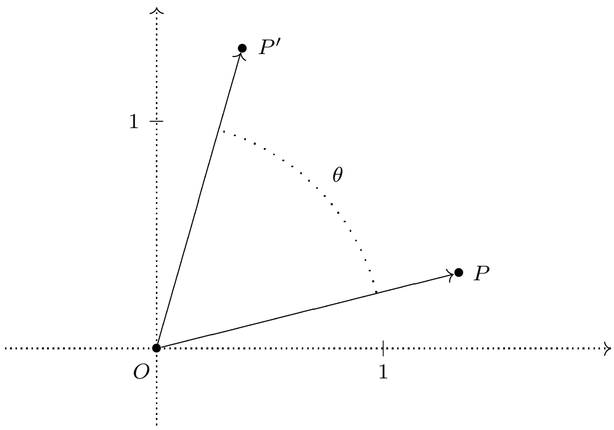


$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \sin\pi = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

問題 1. 例として、次のように定義された写像を考える。



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad F_\theta \quad} & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OP} & \longmapsto & \overrightarrow{OP'} \end{array}$$

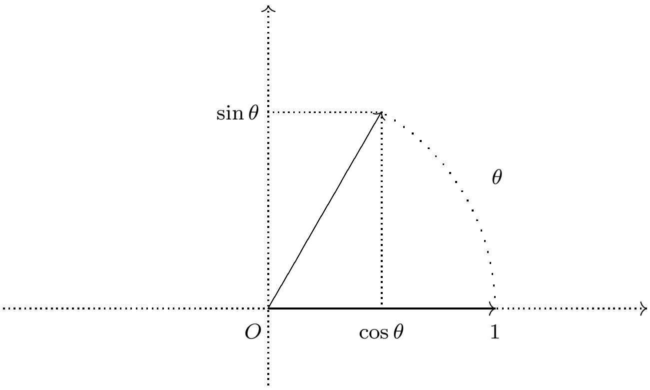
ここで、$\mathbb{R}^2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ は平面ベクトルのなす集合であり、F_θ はベクトル $\overrightarrow{OP}$ を、原点 O を中心として θ 回転させたベクトル $\overrightarrow{OP'}$ に移すルールである。これに対して、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

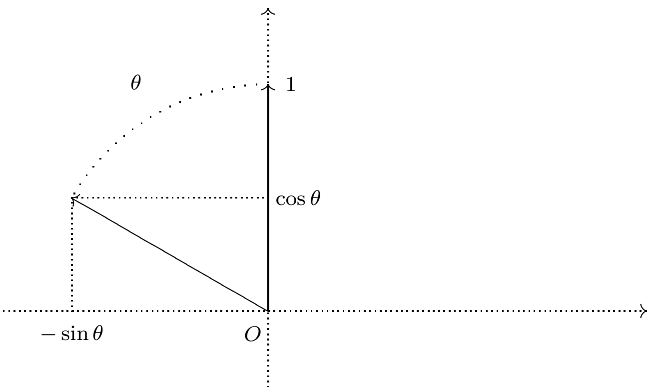
とすると、

$$F_\theta(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

はどう表されるか？



$$\Rightarrow \qquad F_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \qquad F_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

写像 $F_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が次の性質 (1)–(2) をもつことが分かると問題が解ける。

(1) スカラー倍がスカラー倍になっている。

$$F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$$

(2) ベクトル和がベクトル和になっている。

$$F_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$$

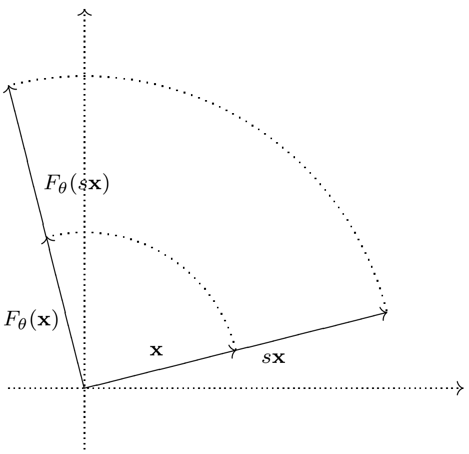
性質 (1)–(2) を満たす写像は、線形写像と呼ばれる。この性質により、

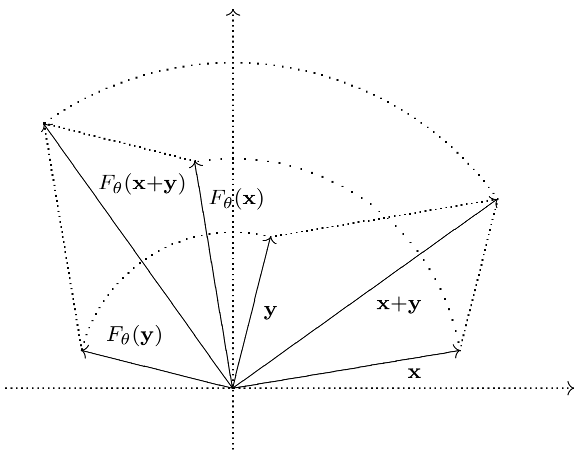
$$
\begin{aligned}
F_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F_\theta\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(2)}{=} F_\theta\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F_\theta\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(1)}{=} xF_\theta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yF_\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。すなわち、回転 $F_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、

$$
F_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

と表される。性質 (1)–(2) は、次の図式から成り立つことが分かる。





$\Rightarrow \quad F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$ $\qquad\qquad$ $\Rightarrow \quad F_\theta(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$

<u>命題</u> **2.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、次のように表される。

$$
F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

ただし、

$$
\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

である。

証明 線形写像の定義より、

$$
\begin{aligned}
F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(2)}{=} F\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(1)}{=} xF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yF\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。よって、命題は示された。 □

問題 3. ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角 β 回転させて角 α 回転させるとどうなるか？まず、問題 1 より、角 β 回転させたベクトルは、

$$F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。同様に、そのベクトルの角 α 回転させたベクトルは、

$$F_\alpha(F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。一方、

$$F_\alpha(F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F_{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

であることが成り立つ。すなわち、

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

であることが分かる。

<u>命題</u> **4.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように表す。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は次のように表される。

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>証明</u> 合成写像の定義より、

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

なので、命題 2 によって、

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であることが分かる。 $\square$

<u>注</u> 5. 一般的に、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

は異なる。