4　行列とその演算

定義 **1.** 自然数 m と n において、$m \times n$ 個の実数 a_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$）を次のように長方形に並べて ( ) または [ ] でくくったものは $m \times n$ 行列または $m \times n$ 型の行列（m-by-n real matrix or matrix of dimension m-by-n）と呼ばれる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この a_{ij} は行列の (i, j) 成分（(i, j)th entry）と呼ばる。行列 A の成分の横のならび

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

は、A の第 i 行（ith row）と呼ばれ、A の成分の縦のならび

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

は、A の第 j 列（jth column）と呼ばれる。

注 2. $1 \times n$ 行列は、n 次の行ベクトル（row vector）とも呼ばれ、$m \times 1$ 行列は m 次の列ベクトル（column vector）とも呼ばれる。

例 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ は 2×3 行列、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ は 4 次の行ベクトル、$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ は 3 次の列ベクトルである。

定義 **4.** (i) 全ての成分が 0 であるような $m \times n$ 行列は、$m \times n$ 零行列（$m \times n$ zero matrix）と呼ばれ、$O_{m,n}$ または単に O と書かれる。

(ii) $n \times n$ 行列は n 次の正方行列（square matrix of order n）とも呼ばれる。

(iii) n 次の正方行列 A において、成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ は、A の対角成分（diagonal entries）と呼ばれる。

(iv) 対角成分以外の成分が全て 0 である n 次の正方行列は、n 次の対角行列（diagonal matrix of order n）と呼ばれる。

(v) 対角成分が全て 1 である n 次の対角行列は、n 次の単位行列（identity matrix）と呼ばれ、E_n または単に E と書かれる。

(vi) 行列 A の行と列を入れ替えた行列は、行列 A の転置行列（transpose）と呼ばれ、${}^tA$ と書かれる。成分で書くと

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

注 5. (i) 行列 A は $m\times n$ 型の行列のとき、転置行列 ${}^tA$ は $n\times m$ 型の行列である。

(ii) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ の転置行列 ${}^t({}^tA)$ は、元の行列 A に戻る。すなわち、${}^t({}^tA)=A$ である。

例 6. (i) $O_{2,3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の正方行列である。

(iii) 上の正方行列 A の対角成分は $2,-2,1$ である。

(iv) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は 3 次の対角行列であり、その対角成分は $1,-1,2$ である。

(v) $E_1=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$、$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$、…

(vi) ${}^tO_{2,3} = O_{3,2}$、${}^tE_n = E_n$

(vii) 上の行列 A と B に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、${}^tB = B$ である。

定義 **7.** (i) 同じ $m \times n$ 型の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad と \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

の和（sum）は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(ii) スカラー $s \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のスカラー積（scalar product）は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

注 8. (i) 型は異なる行列の和は定義されていない。

(ii) スカラー積 $(-1)A$ は単に $-A$ と書かれる。

(iii) $m \times n$ 行列 A と $-B$ の和は単に $A - B$ と書かれ、行列 A と B の差（difference）と呼ばれる。

<u>命題</u> **9.** $m \times n$ 行列 A、B、C において、次の性質が成立する。

(i) （和の結合律）$A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) （和の交換法則）$A + B = B + A$

(iii) $A + O = A = O + A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A において、次の性質が成立する。

(iv) $(st)A = s(tA)$

(v) $0A = O$、$1A = A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A、B において、次の性質が成立する。

(vi) （分配法則）$s(A + B) = sA + sB$

(vii) （分配法則）$(s + t)A = sA + tA$

<u>証明</u> 定義からすぐ成り立つ。 $\square$

<u>例</u> 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} A - 2B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

定義 **11.** $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B の積（matrix product）は、次のように定義される $m \times p$ 行列 AB である。行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

とし、$i = 1, 2, \dots, m$ と $j = 1, 2, \dots, p$ に対して、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

である。

注 12. 定義 11 における c_{ij} は“行列 A の第 i 行掛ける行列 B の第 j 列”であることを考えればよい。

例 13. 2×3 行列 A と 3×4 行列 B をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると、積 AB は次の 2×4 行列となる。

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

以上の行列 A と B に対して、積 BA は定義されていない。

注 14. n 次の正方行列 A と B に対して、行列 AB と BA は、両方定義されている。しかし、一般的に AB と BA は異なる。例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad と \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

命題 **15.** $m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B、$p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(i) （積の結合律）$A(BC) = (AB)C$

(ii) $AE_n = A$、$E_m A = A$

スカラー $s \in \mathbb{R}$、$m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B において、次の性質が成り立つ。

(iii) $(sA)B = s(AB) = A(sB)$

$m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B と B'、$p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(iv) （分配法則）$A(B + B') = AB + AB'$

(v) （分配法則）$(B + B')C = BC + B'C$

証明 積の結合律 (i) を示すために、定義 11 を思い出す。行列 BC の (u, k) 成分は

$$\sum_{v=1}^{p} b_{uv} c_{vk}$$

なので、行列 $A(BC)$ の (i, k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{u=1}^{n} a_{iu} (\sum_{v=1}^{p} b_{uv} c_{vk}) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{p} a_{iu} b_{uv} c_{vk}$$

同様に、行列 AB の (i,v) 成分は

$$\sum_{u=1}^{n} a_{iu}b_{uv}$$

なので、行列 $(AB)C$ の (i,k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{v=1}^{p}(\sum_{u=1}^{n} a_{iu}b_{uv})c_{vk} = \sum_{v=1}^{p}\sum_{u=1}^{n} a_{iu}b_{uv}c_{vk}$$

行列 $A(BC)$ と $(AB)C$ の (i,k) 成分（$i = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,q$）は等しいので、

$$A(BC) = (AB)C$$

を示した。他の性質 (ii)–(v) は簡単に証明される。 $\square$

注 16. 行列 A は正方行列なら、A を n 回掛けた行列 A^n が定義された。

例 17. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

例 18. n 次の正方行列 A と B に対して、

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &\overset{\text{(iv)}}{=} (A+B)A + (A+B)B\\ &\overset{\text{(v)}}{=} A^2 + BA + AB + B^2\end{aligned}$$

である。

定義 **19.** $m \times n$ 行列のなす集合は、$M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書かれる。

注 20. (i) n 次の正方行列のなす集合 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ は、単に $M_n(\mathbb{R})$ と書かれる。

(ii) n 次の列ベクトルのなす集合 $M_{n,1}(\mathbb{R})$ は、単に $\mathbb{R}^n$ と書かれる。