# 6　連立 1 次方程式

次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

行列を用いて、この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式で表される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とすると、方程式 (2) は、次のようにも表される。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

ここで、行列 $A$ は、連立 1 次方程式 (1) の係数行列（coefficient matrix）と呼ばれる。係数行列 $A$ は $m \times n$ 型の行列であることと、元の方程式 (1) は $m$ 個の方程式からなる $n$ 変数の連立 1 次方程式であることは、同値である。次の $m \times (n+1)$ 型の行列は、方程式 (1) と (2) の拡大係数行列（augmented coefficient matrix）と呼ばれる。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

例 3. 次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 \phantom{- 2x_2} - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 \phantom{+ 4x_4} = 0 \end{cases}$$

この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式とも表される。

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上の方程式の拡大係数行列は、次の $3 \times 5$ 型の行列となる。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

係数行列 $A$ を、$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトルに分割すると

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$$

となる。よって、連立 1 次方程式 (1) は

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{4}$$

となる $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を求めることと同等である。

定義 **5.** $m$ 次の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が与えられたとき、$m$ 次の 列ベクトル

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合（linear combination）と呼ばれる。

例 6. 任意の 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は、次のように列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合と表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 7. 例 3 における連立 1 次方程式は、次のよにも表される。

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 8. 式の加減、入れ替え等を行うことによって、次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \\
(\mathrm{II}) & \begin{cases} -y = -2 & ① + ② \times (-2) \\ x + 2y = 5 \end{cases} \\
(\mathrm{III}) & \begin{cases} -y = -2 \\ x = 1 & ② + ① \times 2 \end{cases} \\
(\mathrm{IV}) & \begin{cases} x = 1 \\ -y = -2 \end{cases} \quad ① と ② を入れ替えた \\
(\mathrm{V}) & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 & ② \times (-1) \end{cases}
\end{array}$$

ここで ① と ② その 1 つ前の連立方程式の第 1 式と第 2 式を意味する。

問題 8 で行った変形は次の 3 つである。これらは連立 1 次方程式の基本変形と呼ばれる。

(1) 1 つの式を何倍か（$\neq 0$ 倍）する。

(2) 2 つの式を入れ替える。

(3) 1 の式に他の式の何倍かを加える。

基本変形 (1)–(3) は可逆的であるので、連立 1 次方程式の解集合を変更しない。上のように基本変形 (1)–(3) を用いて連立 1 次方程式を解く方法は掃き出し法（Gaussian elimination）と呼ばれる。

問題 9. 連立 1 次方程式の拡大行列を用いて、問題 8 をもう一回考える。

$$
\begin{array}{rcl}
\text{(I)} & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) & \\
\text{(II)} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) & ① + ② \times (-2) \\
\text{(III)} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) & ② + ① \times 2 \\
\text{(IV)} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) & ① \text{と} ② \text{を入れ替えた} \\
\text{(V)} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) & ② \times (-1)
\end{array}
$$

ここで ① と ② その 1 つ前の拡大行列の第 1 行と第 2 行を意味する。

定義 **10.** 行列の次の 3 つの変形を行基本変形（elementary row operations）と呼ばれる。

(1) 1 つの行を何倍か（$\neq 0$ 倍）する。

(2) 2 つの行を入れ替える。

(3) 1 の行に他の行の何倍かを加える。

例 11. 次の連立 1 次方程式を、拡大係数行列の基本変形を用いて解いてみる。

$$
\begin{cases}
2x + 3y - z = -3 \\
-x + 2y + 2z = 1 \\
x + y - z = -2
\end{cases}
$$

拡大係数行列とその基本変形を次のように略記して縦に書くと分かりやすい。①、②、③は、その 1 つ上の行列の第 1 行、第 2 行、第 3 行をする。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | −1 | −3 | |
| −1 | 2 | 2 | 1 | |
| 1 | 1 | −1 | −2 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | ① + ③ × (−2) |
| 0 | 3 | 1 | −1 | ② + ③ |
| 1 | 1 | −1 | −2 | |
| 1 | 1 | −1 | −2 | |
| 0 | 3 | 1 | −1 | ① と ③ の入れ替え |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | −2 | −3 | ① + ③ × (−1) |
| 0 | 0 | −2 | −4 | ② + ③ × (−3) |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | −2 | −3 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | ② × (−1/2) |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | −2 | −3 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | ② と ③ の入れ替え |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | ① + ③ × 3 |
| 0 | 1 | 0 | −1 | ② + ③ × (−1) |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |

これを連立 1 次方程式に戻して

$$\begin{cases} x & & & = 1 \\ & y & & = -1 \\ & & z & = 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (\text{答}) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

を得る。