7　行列の簡約化

定義 **1.** 行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない左から最初の成分はその行の主成分（pivot）と呼ばれる。

例 2. 次の行列 A の第 1 行の主成分は 3、第 2 行の主成分は 1、第 4 行の主成分は 2 である。第 3 行は零ベクトルなので、主成分はない。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 **3.** 次の性質を満たす行列は簡約な行列（reduced row echelon matrix）と呼ばれる。

(I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば、それ以下の行ベクトルも零ベクトルである。

(II) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である。

(III) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると、$j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ となる。

(IV) 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である。

例 4. （簡約な行列の例）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 5. （簡約でない行列の例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 6. (i) 行列 A に行基本変形を繰り返すことにより、簡約な行列 B ができる。

(ii) 簡約な行列 B と C は、行列 A に行基本変形を繰り返して得られたものであれば、必ず $B = C$ である。

証明 後期に示す。 □

定義 7. 行列 A に行基本変形を繰り返した簡約な行列 B は、元の行列 A の簡約化（reduced row echelon form）とよばれる。

例 8. 例 2 で考えた行列 A を簡約化する。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ① \times (1/3) \\ \\ \\ ④ \times (1/2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ① \text{と} ② \text{を入れ替えた} \\ \\ ③ \text{と} ④ \text{を入れ替えた} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ① + ③ \times (-2)$$

定義 9. 行列 A において、A の簡約化 B の主成分の個数は、A の階数（rank）とよばれ、$\mathrm{rank}(A)$ と書かれる。

注 10. (1) 行列 A の階数は、簡約化 B の零ベクトルでない行の個数とも定義される。

(2) 一般的に、行列 A の主成分の個数は、A の階数以上である。

例 11. 例 4 における行列の階数を計算する。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,, \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\,, \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

例 12. 例 5 における行列の階数を計算する。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

命題 13. $m \times n$ 型の行列 A に対して、 $\mathrm{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$ である。

証明 行列 A の簡約化 B も $m \times n$ 型の行列であり、定義 9 より、

$$\mathrm{rank}(A) = B \text{ の主成分を含む行の個数} = B \text{ の主成分を含む列の個数}$$

である。よって、

$$\mathrm{rank}(A) \leqslant B \text{ の行の個数} = m$$
$$\mathrm{rank}(A) \leqslant B \text{ の列の個数} = n$$

であることが分かる。 □

定義 14. 次の m 次の正方行列は、基本行列と呼ばれる。

(1) 単位行列 E の第 i 行を s 倍（$\neq 0$ 倍）した行列 $P_i(s)$

(2) 単位行列 E の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列 $T_{i,j}$

(3) 単位行列 E の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列 $E_{i,j}(s)$

例 15. （3次の基本変形の例）

$$P_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

命題 **16.** A は $m \times n$ 型の行列とする。

(1) $P_i(s)A$ は、行列 A の第 i 行を s 倍した行列と等しい。

(2) $T_{i,j}A$ は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列と等しい。

(3) $E_{i,j}(s)A$ は、行列 A の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列と等しい。

証明 定義からすぐ成り立つ。 □

例 17. （基本行列とその行基本変形）A は 3×2 型の行列とする。

$$P_3(s)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ sa_{31} & sa_{32} \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$E_{2,3}(s)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + sa_{31} & a_{22} + sa_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

命題 **18.** 基本行列は可逆行列である。具体的には、

$$\begin{aligned} &P_i(s)P_i(1/s) = E = P_i(1/s)P_i(s) \\ &T_{i,j}T_{i,j} = E \\ &E_{i,j}(s)E_{i,j}(-s) = E = E_{i,j}(-s)E_{i,j}(s) \end{aligned}$$

である。

例 19. 前回の例 11 では、次の拡大行列 A の簡約化 B を計算した。

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

基本行列を用いて、その計算は次のように表される。

$$B = E_{2,3}(-1)E_{1,3}(3)T_{2,3}P_2(-1/2)E_{2,3}(-3)E_{1,3}(-1)T_{1,3}E_{2,3}(1)E_{1,3}(-2)A$$