9　可逆行列

今回、正方行列しか考えない。

補題 1. n 次の正方行列 A において、次の性質は同値である。

(i) $AC = E_n$ を満たす n 次の正方行列 C が存在する。

(ii) 任意の n 次の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持つ。

証明. (i)⇒(ii)：$\mathbf{x} = C\,\mathbf{b}$ とすると、

$$A\mathbf{x} = A(C\,\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = E_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

が成り立つ。

(ii)⇒(i)：n 次列ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、仮定より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, $\dots$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は解を持つ。その解を各々 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_2$, $\dots$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ とし、

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$$

とおくと、C は n 次の正方行列で、

$$AC = A\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \cdots & A\mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = E_n$$

となる。 □

補遺 2. 正方行列 A において、$AC = E_n$ と $AC' = E_n$ を満たす正方行列 C と C' に対して、必ず $C = C'$ である。

証明. $AC = E_n$ を満たす正方行列 C が存在するので、補題 1 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つ。よって、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = n$ であることが分かる。従って、前回示した補遺 4 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, ..., $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、各々ただ一つの解 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1$, ..., $\mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ を持つ。よって、$AC = E_n$ を満たす正方行列 $C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ にも、ただ一つが存在する。 □

命題 **3.** 最大階数 n の正方行列 A において、行列 $(A \mid E_n)$ の簡約化を $(E_n \mid C)$ とすると、n 次の正方行列 C は、$AC = E_n$ を満たす。

証明. 確かに、C を $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ と書くと、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ の解集合は等しいので、$AC = E_n$ が成り立つ。 □

定理 **4.** n 次正方行列 A と C において、

$$AC = E_n \quad \Rightarrow \quad CA = E_n$$

証明. まず、A は基本行列である場合を考える。

(1) $A = P_i(s)$ のとき、$C = P_i(1/s)$ なので、$CA = P_i(1/s)P_i(s) = E_n$ ともなる。

(2) $A = T_{i,j}$ のとき、$C = T_{i,j}$ なので、$CA = AC = E_n$ ともなる。

(3) $A = E_{i,j}(s)$ のとき、$C = E_{i,j}(-s)$ なので、$CA = E_{i,j}(-s)E_{i,j}(s) = E_n$ ともなる。

一般的に、$AC = E_n$ を満たす行列 C が存在するとき、A の簡約化は E_n となるので、ある基本行列 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ に対して、

$$C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 A = E_n$$

であることが分かる。従って、$C_i D_i = E_n$ を満たす正方行列 D_i において、

$$A = D_1 D_2 \ldots D_{N-1} D_N$$

と表される。以上の場合から、

$$AC_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 = D_1 D_2 \ldots D_{N-1} D_N C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 = E_n$$

が成り立つ。よって、$C = C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1$ で、$CA = E_n$ であることが分かる。 □

定義 5. 正方行列 A をおいておく。

(1) $AC = E_n = CA$ を満たす正方行列 C は、A の逆行列と呼ばれ、A^{-1} と書かれる。

(2) A を逆行列を持つとき、可逆行列あるいは正則行列と呼ばれる。

定理 4 より、$AC = E_n$ を満たす正方行列 C は、必ず $CA = E_n$ とも満たすので、A の逆行列となる。

例 6. 命題 3 を用いて、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned}
(A \mid E_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} ② + ① \times (-3) \\ ③ + ① \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) && ③ + ② \times (-2) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) && \begin{array}{l} ② \times (1/2) \\ ③ \times (-1/3) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) && ② + ③ \times (-1) \\
(E_3 \mid A^{-1}) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) && ① + ②
\end{aligned}$$

よって、A の逆行列は、次の行列となる。

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$