線形代数I

ヘッセルホルト　ラース

目 次

1　写像

定義 **1.1.** 写像 $f\colon A\to B$ とは、集合 A と B と任意の $a\in A$ を $f(a)\in B$ に対応させるルール f を合わせたものである。集合 A は写像 $f\colon A\to B$ の定義域と呼ばれ、集合 B は写像 $f\colon A\to B$ の値域と呼ばれる。

写像 $f\colon A\to B$ も $A\xrightarrow{f}B$ と書く。

例 1.2. 次の三つの写像は互いに違う写像である。

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=x^2\\
&g\colon \mathbb{R}\to[0,\infty), \quad g(x)=x^2\\
&h\colon [0,\infty)\to[0,\infty), \quad h(x)=x^2
\end{aligned}$$

例 1.3. 微分法も次のような写像である。

$$\begin{aligned}
\{F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid F\text{ は微分可能である}\} &\longrightarrow \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\\
F &\longmapsto F'
\end{aligned}$$

定義 **1.4.** 写像 $f\colon A\to B$ をおいておく。

(1) 任意の $b\in B$ について、ある $a\in A$ に対して、$b=f(a)$ であるとき、写像 $f\colon A\to B$ は全射と呼ばれる。

(2) 任意の $a_1,a_2\in A$ に対して、「$f(a_1)=f(a_2)$ ならば $a_1=a_2$」のとき、写像 $f\colon A\to B$ は単射と呼ばれる。

(3) 写像 $f\colon A\to B$ は全射で単射でもあるとき、全単射と呼ばれる。

注 1.5. 「$f(a_1)=f(a_2)$ ならば $a_1=a_2$」と「$a_1\neq a_2$ ならば $f(a_1)\neq f(a_2)$」は同値である。

例 1.6. 例 1.2 では、$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は全射でも単射でもない、$g\colon\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は全射であり単射でない、$h\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ は全単射である。

定義 **1.7.** 写像 $f\colon A\to B$ について、部分集合

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\subset B$$

は写像 $f\colon A\to B$ の像と呼ばれる。

注 1.8. 写像 $f\colon A \to B$ は全射であることとその像 $f(A)$ が集合 B の全体であることは同値である。

例 1.9. 例 1.2 では、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$、$h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ は、全て同じ像 $[0,\infty)$ を持つ。例 1.3 で定義された写像の像は次の部分集合と等しい。

$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は原始関数を持つ}\} \subset \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

定義 **1.10.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。部分集合 $V \subset B$ の f による逆像は、

$$f^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) \in V\} \subset A$$

で定義された A の部分集合である。部分集合 $V \subset B$ はただ一つの元 $b \in B$ からなるとき、逆像 $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{b\}) \subset A$ も $f^{-1}(b)$ 表す。

注 1.11. 唯一つの元からなる部分集合 $\{b\} \subset B$ の場合には、逆像 $f^{-1}(\{b\})$ も $f^{-1}(b)$ と表し、次のように与えられている。

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subset A$$

ただし、逆像 $f^{-1}(b)$ は集合 A の部分集合であり、集合 A の元ではない。

例 1.12. 例 1.2 で定義された写像のとき、唯一つの元からなる部分集合の逆像は次のように与えられている。

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \\ \emptyset & (y < 0) \end{cases}$$

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \end{cases}$$

$$h^{-1}(y) = \{\sqrt{y}\}$$

補題 **1.13.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。

(1) 任意の部分集合 $V \subset B$ に対して、$f(f^{-1}(V)) \subset V$

(2) 任意の部分集合 $U \subset A$ に対して、$f^{-1}(f(U)) \supset U$

証明 (1) $f(f^{-1}(V)) = \{f(a) \mid a \in f^{-1}(V)\} = \{f(a) \mid f(a) \in V\} \subset V$

(2) $f^{-1}(f(U)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(U)\} \supset U$

定義 **1.14.** 写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ において、次のように定義された写像 $g \circ f\colon A \to C$ は写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成写像と呼ばれる。

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

次の図式を見ると以上の定義がすぐ分かる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

補題 **1.15.** (1) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全射である。

(2) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も単射である。

(3) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全単射である。

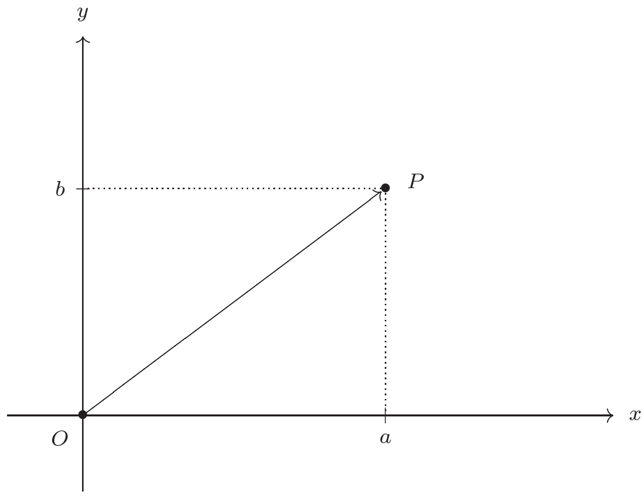
証明 (1) 合成写像 $g \circ f\colon A \to C$ の像は C であることを示せばよい。

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

(2) 「$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$」を満たす元 $a_1, a_2 \in A$ をおいおく。$a_1 = a_2$ であることを示せばよい。まず、合成写像の定義より $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ であることが分かる。それに、$g\colon B \to C$ は単射なので、$f(a_1) = f(a_2)$ であることが分かる。最後に、$f\colon A \to B$ も単射なので、$a_1 = a_2$ であることが分かる。よって、$g \circ f\colon A \to C$ は単射であることを示した。
(3) は (1) と (2) から分かる。

2　平面、空間のベクトルと簡単な図式

直交座標系とは、互いに直交している座標軸を指定することによって定まる座標系のことである。平面上の直交座標系ではそれぞれの点に対して一意に定まる 2 つの実数の組によって点の位置が指定される。

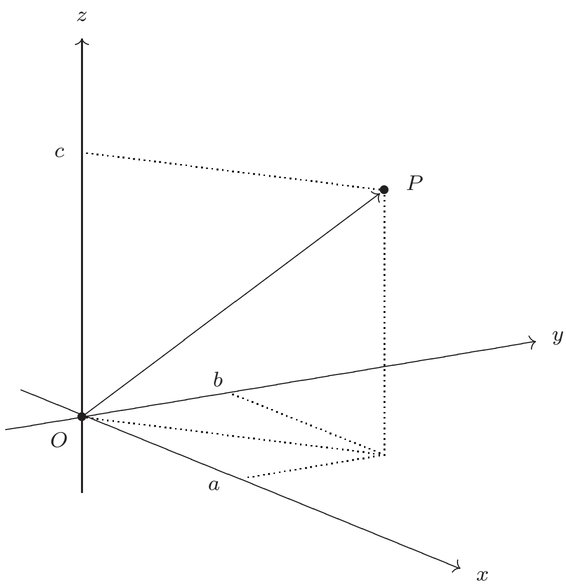


これは、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

座標 a と b はそれぞれ x 軸成分と y 軸成分と呼ばれる。点 O は、原点と呼ばれる。

<u>注</u>：空間上の直交座標系では 3 つの実数の組によって座標が与えられる。

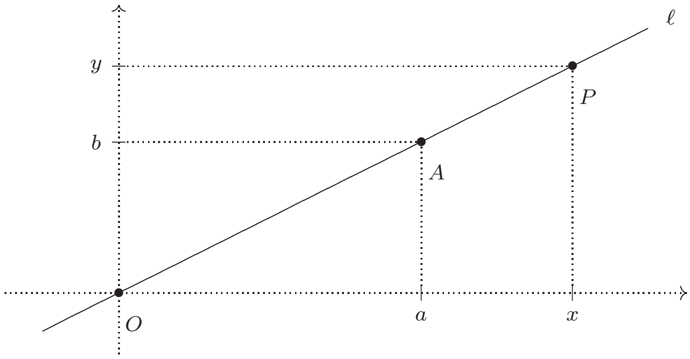


これは、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

座標 a、b、c はそれぞれ x 軸成分、y 軸成分、z 軸成分と呼ばれる。点 O は、原点と呼ばれる。

問題 2.1. 原点を通る直線 ℓ の表示を考えましょう。ℓ 上に原点 O と異なる点 A をとる。



このとき、他の点 P は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa \\ sb \end{pmatrix}$$

ここで、s は点 P と一対一対応する実数（スカラー）である。この方程式は、直線 ℓ のパラメーター表示と呼ばれ、平面ベクトルを用いて次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$$

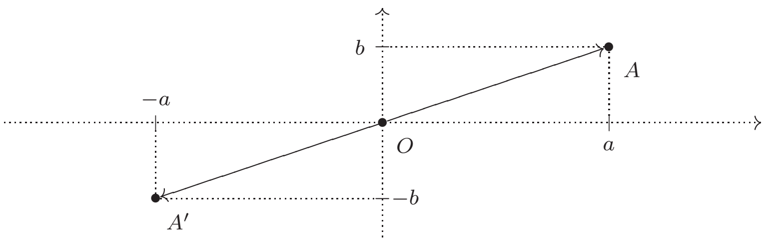
ここで、右辺は、スカラー s とベクトル $\overrightarrow{OA}$ のスカラー積と呼ばれる。

例 2.2. 原点 O と $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たす点 A を通る直線のパラメーター表示は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

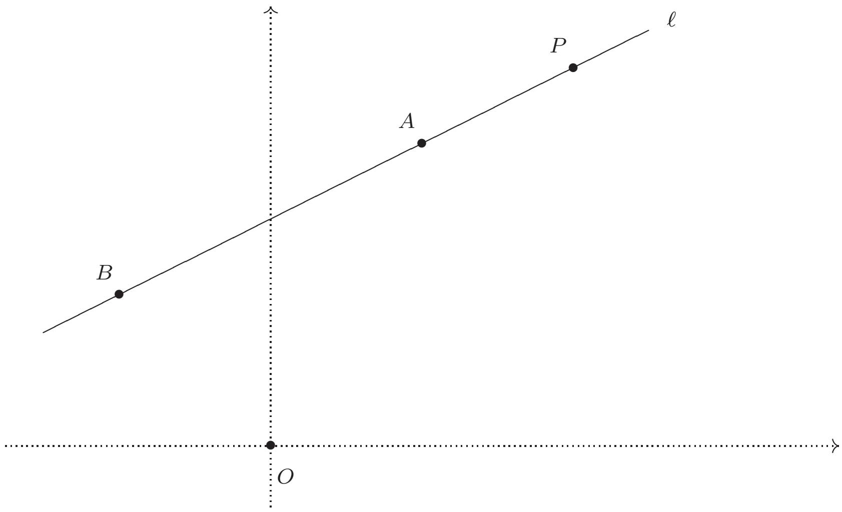
と表される。つまり、$x/2 = y/3$ となっている。

注 2.3. スカラー積 $(-1)\overrightarrow{OA}$ は単に $-\overrightarrow{OA}$ と略記される。



$$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$$

問題 2.4. 必ずしも原点を通らない直線 ℓ をどう書くか？



直線 ℓ 上に 2 点 A,B をとる。問題 2.1 より、直線 ℓ 上の点 P は、次の方程式を満たす。

$$\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BA}$$

よって、ℓ 上の点 P は、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA} \tag{2.5}$$

ここで、「+」はベクトルの足し算を表す。ベクトルの足し算は、成分ごとに足すことである。次に、方程式 (2.5) の座標を考える。まず、

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と表す。それに、

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

なので、ベクトル $\overrightarrow{BA}$ は次のように表されることがわかる。

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると、方程式 (2.5) は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + s(a_1 - b_1) \\ b_2 + s(a_2 - b_2) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

方程式 (2.5) と (2.6) は直線 ℓ のパラメーター表示と呼ばれる。

例 2.7. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点を通る直線のパラメータ表示を求める。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 3 + 6s \\ 4 + 3s \end{pmatrix}$$

この方程式は、次の方程式と同じである。

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{3}$$

例 2.8. 空間内の直線も全く同じようにできる。例として、$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ で定まる点を通る直線のパラメーター表示は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 + 4s \\ -2 + 3s \\ -3 + 2s \end{pmatrix}$$

この方程式は、次の方程式と同じである。

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{2}$$

注 2.9. パラメーター表示は、物理的な直観に合っている。パラメーター s を時間とみなす。

$$\begin{aligned} s = 0 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OB} \\ s = 1 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \\ s = 2 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

この捕らえ方で、直線は一定の速度で運動している物体の軌跡である。

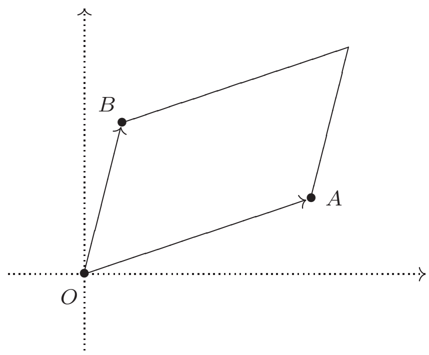
$$\begin{aligned} s &\quad \cdots \quad \text{時間} \\ \overrightarrow{OB} &\quad \cdots \quad \text{時刻 } 0 \text{ での位置} \\ \overrightarrow{BA} &\quad \cdots \quad \text{速度} \end{aligned}$$

注 2.10. 点 A、B を通る直線のパラメーター表示

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA}$$

において、「$0 \leqslant s \leqslant 1$」という条件と「$P$ が線分 BA にのっている」という条件は同値である。

問題 2.11. 平行四辺形を考えましょう。



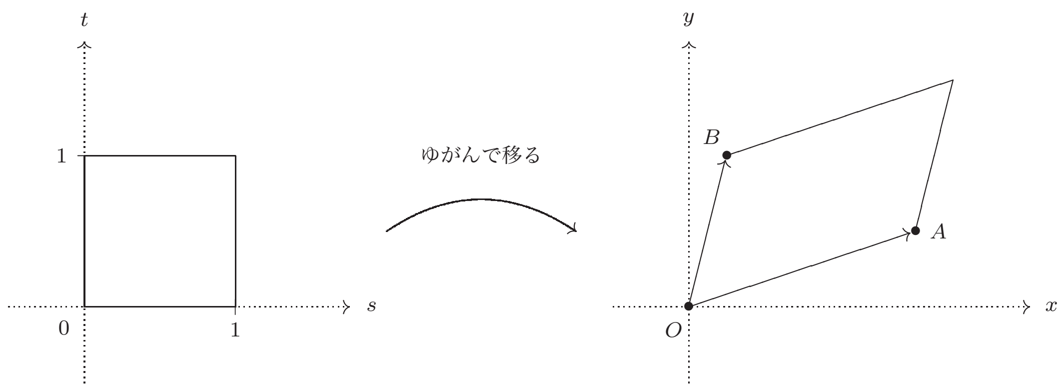
注 2.10 より、線分 OA、OB 上にのっている点 P は、それぞれ

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

と表される。同様に、平行四辺形内の点 P は、以下のように表示される。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$



問題 2.12. 点 P を原点中心に角度 α だけ回転させた点を P' とする。このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

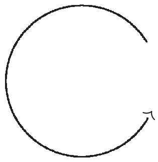
とすると、次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

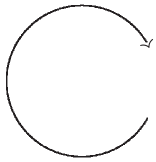
3　線形写像

まず、角について復習する。

- 反時計まわりを基本とする。

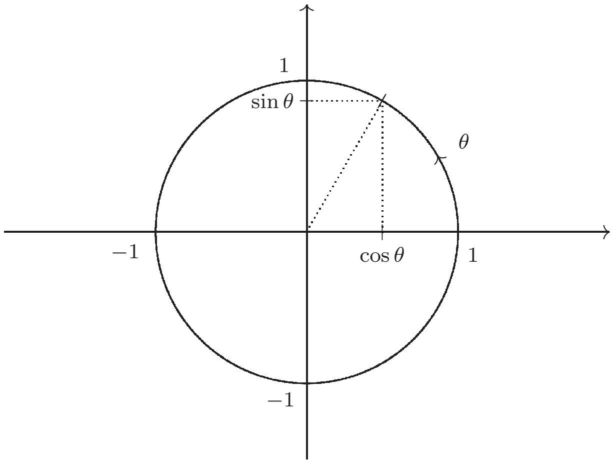


反時計まわり＝基本
counter-clockwise



時計まわり
clockwise

- 角をはかるときはラジアンを単位とする。

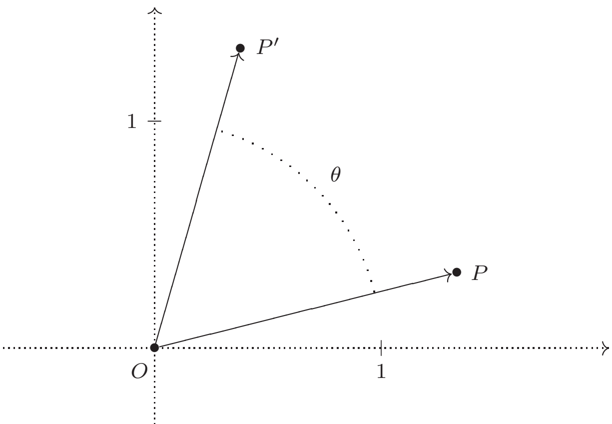


$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \sin\pi = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

問題 3.1. 例として、次のように定義された写像を考える。



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F_\theta} & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OP} & \longmapsto & \overrightarrow{OP'} \end{array}$$

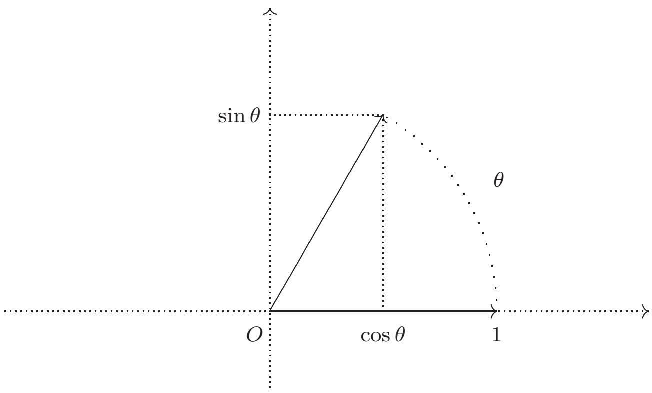
ここで、$\mathbb{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ は平面ベクトルのなす集合であり、F_θ はベクトル $\overrightarrow{OP}$ を、原点 O を中心として θ 回転させたベクトル $\overrightarrow{OP'}$ に移すルールである。これに対して、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

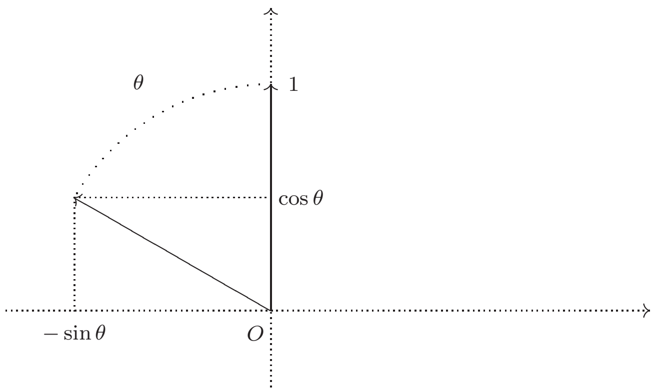
とすると、

$$F_\theta(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

はどう表されるか？



$$\Rightarrow \qquad F_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \qquad F_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

写像 $F_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が次の性質 (1)–(2) をもつことが分かると問題が解ける。

(1) スカラー倍がスカラー倍になっている。

$$F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$$

(2) ベクトル和がベクトル和になっている。

$$F_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$$

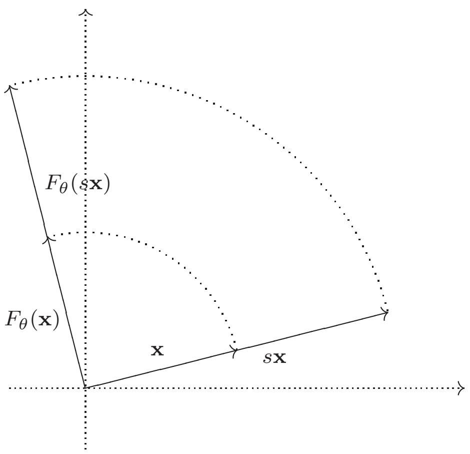
性質 (1)–(2) を満たす写像は、線形写像と呼ばれる。この性質により、

$$
\begin{aligned}
F_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F_\theta\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(2)}{=} F_\theta\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F_\theta\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(1)}{=} xF_\theta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yF_\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

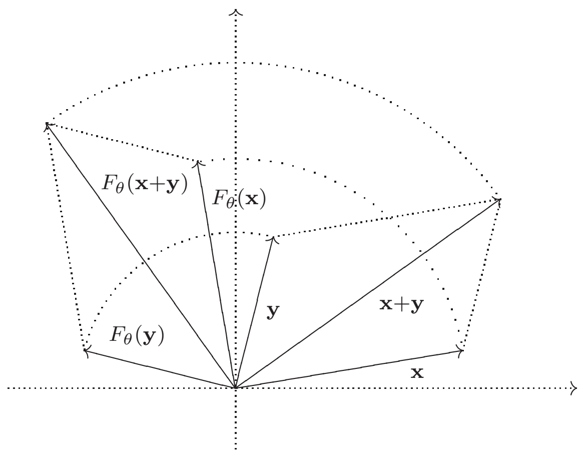
が成り立つ。すなわち、回転 $F_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、

$$
F_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

と表される。性質 (1)–(2) は、次の図式から成り立つことが分かる。



$$\Rightarrow \quad F_\theta(s\mathbf{x}) = sF_\theta(\mathbf{x})$$



$$\Rightarrow \quad F_\theta(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F_\theta(\mathbf{x}) + F_\theta(\mathbf{y})$$

命題 **3.2.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は、次のように表される。

$$
F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

ただし、

$$
\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

である。

証明 線形写像の定義より、

$$
\begin{aligned}
F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{(2)}{=} F\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(1)}{=} xF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yF\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。よって、命題は示された。 □

問題 3.3. ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角 β 回転させて角 α 回転させるとどうなるか？まず、問題 3.1 より、角 β 回転させたベクトルは、

$$
F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

である。同様に、そのベクトルの角 α 回転させたベクトルは、

$$
F_\alpha(F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

である。一方、

$$
F_\alpha(F_\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = F_{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

なので、

$$
\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}
$$

であることが成り立つ。すなわち、

$$
\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
$$

$$
\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
$$

であることが分かる。

命題 **3.4.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように表す。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は次のように表される。

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

証明 合成写像の定義より、

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

なので、命題 3.2 によって、

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であることが分かる。 □

注 3.5. 一般的に、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

は異なる。

4　行列とその演算

定義 4.1. 自然数 m と n において、$m \times n$ 個の実数 a_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$）を次のように長方形に並べて ( ) または [ ] でくくったものは $m \times n$ 行列または $m \times n$ 型の行列（m-by-n real matrix or matrix of dimension m-by-n）と呼ばれる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この a_{ij} は行列の (i, j) 成分（(i, j)th entry）と呼ばる。行列 A の成分の横のならび

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

は、A の第 i 行（ith row）と呼ばれ、A の成分の縦のならび

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

は、A の第 j 列（jth column）と呼ばれる。

注 4.2. $1 \times n$ 行列は、n 次の行ベクトル（row vector）とも呼ばれ、$m \times 1$ 行列は m 次の列ベクトル（column vector）とも呼ばれる。

例 4.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ は 2×3 行列、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ は 4 次の行ベクトル、$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ は 3 次の列ベクトルである。

定義 4.4. (i) 全ての成分が 0 であるような $m \times n$ 行列は、$m \times n$ 零行列（$m \times n$ zero matrix）と呼ばれ、$O_{m,n}$ または単に O と書かれる。

(ii) $n \times n$ 行列は n 次の正方行列（square matrix of order n）とも呼ばれる。

(iii) n 次の正方行列 A において、成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ は、A の対角成分（diagonal entries）と呼ばれる。

(iv) 対角成分以外の成分が全て 0 である n 次の正方行列は、n 次の対角行列（diagonal matrix of order n）と呼ばれる。

(v) 対角成分が全て 1 である n 次の対角行列は、n 次の単位行列（identity matrix）と呼ばれ、E_n または単に E と書かれる。

(vi) 行列 A の行と列を入れ替えた行列は、行列 A の転置行列（transpose) と呼ばれ、${}^tA$ と書かれる。成分で書くと

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

注 4.5. (i) 行列 A は $m \times n$ 型の行列のとき、転置行列 ${}^tA$ は $n \times m$ 型の行列である。

(ii) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ の転置行列 ${}^t({}^tA)$ は、元の行列 A に戻る。すなわち、${}^t({}^tA) = A$ である。

例 4.6. (i) $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の正方行列である。

(iii) 上の正方行列 A の対角成分は $2, -2, 1$ である。

(iv) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は 3 次の対角行列であり、その対角成分は $1, -1, 2$ である。

(v) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$、$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\ldots$

(vi) ${}^tO_{2,3} = O_{3,2}$、${}^tE_n = E_n$

(vii) 上の行列 A と B に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、${}^tB = B$ である。

定義 4.7. (i) 同じ $m \times n$ 型の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

の和（sum）は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(ii) スカラー $s \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のスカラー積（scalar product）は、次のように定義される $m \times n$ 行列である。

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

注 4.8. (i) 型は異なる行列の和は定義されていない。

(ii) スカラー積 $(-1)A$ は単に $-A$ と書かれる。

(iii) $m \times n$ 行列 A と $-B$ の和は単に $A - B$ と書かれ、行列 A と B の差（difference）と呼ばれる。

命題 4.9. $m \times n$ 行列 A、B、C において、次の性質が成立する。

(i) （和の結合律）$A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) （和の交換法則）$A + B = B + A$

(iii) $A + O = A = O + A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A において、次の性質が成立する。

(iv) $(st)A = s(tA)$

(v) $0A = O$、$1A = A$

スカラー $s, t \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 A、B において、次の性質が成立する。

(vi) （分配法則）$s(A + B) = sA + sB$

(vii) （分配法則）$(s + t)A = sA + tA$

証明 定義からすぐ成り立つ。 □

例 4.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} A - 2B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

定義 4.11. $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B の**積**（matrix product）は、次のように定義される $m \times p$ 行列 AB である。行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

とし、$i = 1, 2, \ldots, m$ と $j = 1, 2, \ldots, p$ に対して、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

である。

注 4.12. 定義 4.11 における c_{ij} は“行列 A の第 i 行掛ける行列 B の第 j 列”であることを考えればよい。

例 4.13. 2×3 行列 A と 3×4 行列 B をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると、積 AB は次の 2×4 行列となる。

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

以上の行列 A と B に対して、積 BA は定義されていない。

注 4.14. n 次の正方行列 A と B に対して、行列 AB と BA は、両方定義されている。しかし、一般的に AB と BA は異なる。例として、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

命題 4.15. $m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B、$p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(i) （積の結合律）$A(BC) = (AB)C$

(ii) $AE_n = A$、$E_m A = A$

スカラー $s \in \mathbb{R}$、$m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B において、次の性質が成り立つ。

(iii) $(sA)B = s(AB) = A(sB)$

$m \times n$ 行列 A、$n \times p$ 行列 B と B'、$p \times q$ 行列 C において、次の性質が成り立つ。

(iv) （分配法則）$A(B + B') = AB + AB'$

(v) （分配法則）$(B + B')C = BC + B'C$

証明 積の結合律 (i) を示すために、定義 4.11 を思い出す。行列 BC の (u, k) 成分は

$$\sum_{v=1}^{p} b_{uv} c_{vk}$$

なので、行列 $A(BC)$ の (i, k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{u=1}^{n} a_{iu} (\sum_{v=1}^{p} b_{uv} c_{vk}) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{p} a_{iu} b_{uv} c_{vk}$$

同様に、行列 AB の (i, v) 成分は

$$\sum_{u=1}^{n} a_{iu} b_{uv}$$

なので、行列 $(AB)C$ の (i, k) 成分は、次のように表される。

$$\sum_{v=1}^{p} (\sum_{u=1}^{n} a_{iu} b_{uv}) c_{vk} = \sum_{v=1}^{p} \sum_{u=1}^{n} a_{iu} b_{uv} c_{vk}$$

行列 $A(BC)$ と $(AB)C$ の (i,k) 成分（$i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,q$）は等しいので、

$$A(BC) = (AB)C$$

を示した。他の性質 (ii)–(v) は簡単に証明される。 $\square$

注 4.16. 行列 A は正方行列なら、A を n 回掛けた行列 A^n が定義された。

例 4.17. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

例 4.18. n 次の正方行列 A と B に対して、

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &\overset{\text{(iv)}}{=} (A+B)A + (A+B)B \\ &\overset{\text{(v)}}{=} A^2 + BA + AB + B^2\end{aligned}$$

である。

定義 **4.19.** $m \times n$ 行列のなす集合は、$M_{m,n}(\mathbb{R})$ と書かれる。

注 4.20. (i) n 次の正方行列のなす集合 $M_{n,n}(\mathbb{R})$ は、単に $M_n(\mathbb{R})$ と書かれる。

(ii) n 次の列ベクトルのなす集合 $M_{n,1}(\mathbb{R})$ は、単に $\mathbb{R}^n$ と書かれる。

5　行列と線形写像

前回、$\mathbb{R}^n$ を n 次の列ベクトルのなす集合と定義した。

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

定義 **5.1.** 次の性質 (1)–(2) を満たす写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、線形写像と呼ばれる。

(1) F はスカラー積を保つ。すなわち、

$$F(s\mathbf{x}) = sF(\mathbf{x})$$

(2) F はベクトル和を保つ。すなわち、

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$$

命題 **5.2.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、次のように表される。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}、\quad \cdots \quad、\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

証明 任意の n 次の列ベクトルは、一意に次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、定義 5.1 より、

$$
\begin{aligned}
F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
&= F\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(2)}{=} F\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F\left(x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \cdots + F\left(x_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{(1)}{=} x_1F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_nF\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。よって、命題を示した。 □

定義 5.3. 命題 5.2 における $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

は、線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列と呼ばれる。

例 5.4. A 社は、以下の原材料からスポーツドリンクを生産している：x_1g の水、x_2g の砂糖、x_3g のぶどう糖果糖液糖、x_4g の果汁、x_5g のぶどう糖、x_6g の食塩、x_7g の酸味料、x_8g の塩化 K、x_9g の乳酸 Ca、x_{10}g の調味料、x_{11}g の塩化 Mg、x_{12}g の香料、x_{13}g の酸化防止剤

すなわち、ドリンクの組成は次のベクトルで表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{13} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{13}$$

それに対して、ドリンクの製品の価格は次の線形写像で表される。

$$F\colon \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}, \qquad F(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{13}x_{13} = A\mathbf{x}$$

ここで、原料の価格は、行列 $A = (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{13})$ で表される。現実の世界では、変数 x_i の数は、通常、 1 万程度である。よって、高次元のベクトル空間が多い。

例 5.5. (1) 命題 5.2 より、空間内の「$x = z$」で定義された平面に関して対称な点を対応させる線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、次のように表される。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(2) 空間内に点を y 軸に関して反時計まわりに $\pi/2$ 回転させる線形写像 $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。

命題 **5.6.** 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $G\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ を、次のようにそれぞれの $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B で表す。

$$F(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}, \qquad G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$$

このとき、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ は、次のように $m \times p$ 行列 AB で表される。

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = AB\mathbf{x}$$

証明 合成写像の定義より、$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x}))$ なので、命題 5.2 より、

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

であることが分かる。 □

例 5.7. 以上の例 5.5 における線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、命題 5.6 より、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は次のように表される。

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって、$F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、平面「$x = 0$」に関して対称な点を対応させる線形写像であることが分かる。

次に、行列の分割（partition）を考える。行列をいくつかの小さな行列に分割すると、計算が容易になることが多い。$m \times n$ 行列 A を、以下のように $m_i \times n_j$ 行列 A_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, r$、$j = 1, 2, \ldots, s$）に分割するとき、

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$$

が必要である。ここで、行列 A_{ij} は、分割された行列 A のブロック（block）と呼ばれる。

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)$$

例 5.8.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ \hline -1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

命題 5.9. 次のように分割された $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B をおいておく。行列 A の n 個の列の分割と行列 B の n 個の行の分割が同じであることを仮定する。

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{array}\right).$$

このとき、$m \times p$ 行列 $C = AB$ は、次のように分割される。

$$C = AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{r1} & C_{r2} & \cdots & A_{rt} \end{array}\right), \qquad C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}$$

注 5.10. 命題 5.9 より、分割された行列 A と B の積を計算するとき、A と B の各ブロックの行列を一般の“数”であるように考えればよい。しかし、その“数”の順序を変更しないようにする必要がある。

例 5.11. 次の 4 次の正方行列の n 乗を計算するために、示したように分割する。

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}$$

命題 5.9 より、

$$A^n = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} E & nB \\ O & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2n & n \\ 0 & 1 & 3n & -n \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

であることが分かる。

定義 **5.12.** 次の分割された $m \times n$ 行列 A をおいておく。

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)$$

これについて、$r = m$ と $s = 1$ の場合には、行ベクトルへの分割と呼ばれ、$r = 1$ と $s = n$ の場合には、列ベクトルへの分割と呼ばれる。

列ベクトルは、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ などのアルファベットの小文字の太字で書かれる。$\mathbf{a}$ は列ベクトルのとき、転置行列 ${}^t\mathbf{a}$ は行ベクトルなので、行ベクトルは、${}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{b}, \ldots, {}^t\mathbf{x}, {}^t\mathbf{y}, {}^t\mathbf{z}$ などと書かれる。よって、それぞれの行ベクトルに分割された行列と列ベクトルに分割された行列は、次のようにも表される。

$$A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

行ベクトルへの分割　　　　列ベクトルへの分割

6　連立 1 次方程式

次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6.1}$$

行列を用いて、この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式で表される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とすると、方程式 (6.2) は、次のようにも表される。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.2}$$

ここで、行列 A は、連立 1 次方程式 (6.1) の係数行列（coefficient matrix）と呼ばれる。係数行列 A は $m \times n$ 型の行列であることと、元の方程式 (6.1) は m 個の方程式からなる n 変数の連立 1 次方程式であることは、同値である。次の $m \times (n+1)$ 型の行列は、方程式 (6.1) と (6.2) の拡大係数行列（augmented coefficient matrix）と呼ばれる。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

例 6.3. 次の連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 7 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 9x_3 & & & = & 0 \end{cases}$$

この連立 1 次方程式は、次の行列の方程式とも表される。

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上の方程式の拡大係数行列は、次の 3×5 型の行列となる。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

係数行列 A を、$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトルに分割すると

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$$

となる。よって、連立 1 次方程式 (6.1) は

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{6.4}$$

となる $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を求めることと同等である。

定義 **6.5.** m 次の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が与えられたとき、m 次の 列ベクトル

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合（linear combination）と呼ばれる。

例 6.6. 任意の 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は、次のように列ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合と表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 6.7. 例 6.3 における連立 1 次方程式は、次のよにも表される。

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 6.8. 式の加減、入れ替え等を行うことによって、次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{I}) & \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} & \\
(\mathrm{II}) & \begin{cases} -y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} & ① + ② \times (-2) \\
(\mathrm{III}) & \begin{cases} -y = -2 \\ x = 1 \end{cases} & ② + ① \times 2 \\
(\mathrm{IV}) & \begin{cases} x = 1 \\ -y = -2 \end{cases} & ①\text{と}②\text{を入れ替えた} \\
(\mathrm{V}) & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} & ② \times (-1)
\end{array}$$

ここで ① と ② その 1 つ前の連立方程式の第 1 式と第 2 式を意味する。

問題 6.8 で行った変形は次の 3 つである。これらは連立 1 次方程式の基本変形と呼ばれる。

(1) 1 つの式を何倍か（$\neq 0$ 倍）する。

(2) 2 つの式を入れ替える。

(3) 1 の式に他の式の何倍かを加える。

基本変形 (1)–(3) は可逆的であるので、連立 1 次方程式の解集合を変更しない。上のように基本変形 (1)–(3) を用いて連立 1 次方程式を解く方法は掃き出し法（Gaussian elimination）と呼ばれる。

問題 6.9. 連立 1 次方程式の拡大行列を用いて、問題 6.8 をもう一回考える。

$$
\begin{array}{lll}
\text{(I)} & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) & \\
\text{(II)} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) & ① + ② \times (-2) \\
\text{(III)} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) & ② + ① \times 2 \\
\text{(IV)} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) & ① \text{と} ② \text{を入れ替えた} \\
\text{(V)} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) & ② \times (-1)
\end{array}
$$

ここで ① と ② その 1 つ前の拡大行列の第 1 行と第 2 行を意味する。

定義 **6.10.** 行列の次の 3 つの変形を行基本変形（elementary row operations）と呼ばれる。

(1) 1 つの行を何倍か（$\neq 0$ 倍）する。

(2) 2 つの行を入れ替える。

(3) 1 の行に他の行の何倍かを加える。

例 6.11. 次の連立 1 次方程式を、拡大係数行列の基本変形を用いて解いてみる。

$$
\begin{cases}
2x + 3y - z = -3 \\
-x + 2y + 2z = 1 \\
x + y - z = -2
\end{cases}
$$

拡大係数行列とその基本変形を次のように略記して縦に書くと分かりやすい。①、②、③は、その 1 つ上の行列の第 1 行、第 2 行、第 3 行をする。

2	3	−1	−3	
−1	2	2	1	
1	1	−1	−2	
0	1	1	1	① + ③ × (−2)
0	3	1	−1	② + ③
1	1	−1	−2	
1	1	−1	−2	
0	3	1	−1	① と ③ の入れ替え
0	1	1	1	
1	0	−2	−3	① + ③ × (−1)
0	0	−2	−4	② + ③ × (−3)
0	1	1	1	
1	0	−2	−3	
0	0	1	2	② × (−1/2)
0	1	1	1	
1	0	−2	−3	
0	1	1	1	② と ③ の入れ替え
0	0	1	2	
1	0	0	1	① + ③ × 3
0	1	0	−1	② + ③ × (−1)
0	0	1	2	

これを連立 1 次方程式に戻して

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (\text{答}) \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{cases}$$

を得る。

7　行列の簡約化

定義 7.1. 行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない左から最初の成分はその行の主成分（pivot）と呼ばれる。

例 7.2. 次の行列 A の第 1 行の主成分は 3、第 2 行の主成分は 1、第 4 行の主成分は 2 である。第 3 行は零ベクトルなので、主成分はない。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 7.3. 次の性質を満たす行列は簡約な行列（reduced row echelon matrix）と呼ばれる。

(I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば、それ以下の行ベクトルも零ベクトルである。

(II) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である。

(III) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると、$j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ となる。

(IV) 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である。

例 7.4. （簡約な行列の例）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 7.5. （簡約でない行列の例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 7.6. (i) 行列 A に行基本変形を繰り返すことにより、簡約な行列 B ができる。

(ii) 簡約な行列 B と C は、行列 A に行基本変形を繰り返して得られたものであれば、必ず $B = C$ である。

証明 後期に示す。 □

定義 7.7. 行列 A に行基本変形を繰り返した簡約な行列 B は、元の行列 A の簡約化（reduced row echelon form）とよばれる。

例 7.8. 例 7.2 で考えた行列 A を簡約化する。

$$
\begin{aligned}
A = &\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ① \times (1/3) \\ \\ \\ ④ \times (1/2) \end{matrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ① \text{ と } ② \text{ を入れ替えた} \\ \\ ③ \text{ と } ④ \text{ を入れ替えた} \\ \end{matrix} \\
B = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ① + ③ \times (-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{aligned}
$$

定義 7.9. 行列 A において、A の簡約化 B の主成分の個数は、A の階数（rank）とよばれ、$\mathrm{rank}(A)$ と書かれる。

注 7.10. (1) 行列 A の階数は、簡約化 B の零ベクトルでない行の個数とも定義される。

(2) 一般的に、行列 A の主成分の個数は、A の階数以上である。

例 7.11. 例 7.4 における行列の階数を計算する。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,, \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\,, \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

例 7.12. 例 7.5 における行列の階数を計算する。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

命題 **7.13.** $m \times n$ 型の行列 A に対して、 $\mathrm{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$ である。

証明 行列 A の簡約化 B も $m \times n$ 型の行列であり、定義 7.9 より、

$$\mathrm{rank}(A) = B \text{ の主成分を含む行の個数} = B \text{ の主成分を含む列の個数}$$

である。よって、

$$\mathrm{rank}(A) \leqslant B \text{ の行の個数} = m$$
$$\mathrm{rank}(A) \leqslant B \text{ の列の個数} = n$$

であることが分かる。 □

定義 **7.14.** 次の m 次の正方行列は、基本行列と呼ばれる。

(1) 単位行列 E の第 i 行を s 倍（$\neq 0$ 倍）した行列 $P_i(s)$

(2) 単位行列 E の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列 $T_{i,j}$

(3) 単位行列 E の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列 $E_{i,j}(s)$

例 7.15. （3 次の基本変形の例）

$$P_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

命題 **7.16.** A は $m \times n$ 型の行列とする。

(1) $P_i(s)A$ は、行列 A の第 i 行を s 倍した行列と等しい。

(2) $T_{i,j}A$ は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列と等しい。

(3) $E_{i,j}(s)A$ は、行列 A の第 i 行に第 j 行の s 倍を加えた行列と等しい。

証明 定義からすぐ成り立つ。 □

例 7.17. （基本行列とその行基本変形）A は 3×2 型の行列とする。

$$P_3(s)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ sa_{31} & sa_{32} \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$E_{2,3}(s)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + sa_{31} & a_{22} + sa_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

命題 **7.18.** 基本行列は可逆行列である。具体的には、

$$\begin{aligned} &P_i(s)P_i(1/s) = E = P_i(1/s)P_i(s) \\ &T_{i,j}T_{i,j} = E \\ &E_{i,j}(s)E_{i,j}(-s) = E = E_{i,j}(-s)E_{i,j}(s) \end{aligned}$$

である。

例 7.19. 前回の例 11 では、次の拡大行列 A の簡約化 B を計算した。

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

基本行列を用いて、その計算は次のように表される。

$$B = E_{2,3}(-1)E_{1,3}(3)T_{2,3}P_2(-1/2)E_{2,3}(-3)E_{1,3}(-1)T_{1,3}E_{2,3}(1)E_{1,3}(-2)A$$

8 連立 1 次方程式を解く

前回勉強した簡約化を用いて、連立 1 次方程式を解く。まず、二つの例を考えてみる。

次の連立 1 次方程式を解いてみる。

(1)
$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad - x_3 \quad\quad\quad - 2x_5 = 1 \\ \quad\quad x_2 + x_3 \quad\quad\quad + x_5 = -2 \\ -x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad\quad - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ ③ + ① \\ ④ + ① \times (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ ④ + ② \times (-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} ① + ④ \times (-1) \\ ② + ④ \times 2 \\ ③ + ④ \times (-4) \\ \\ \end{array}$$

よって、連立 1 次方程式 (1) の解集合と次の連立 1 次方程式 $(1')$ の解集合は等しい。

$$(1') \qquad \begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad - 2x_5 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 - x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

しかし、$0 \neq 1$ なので、連立 1 次方程式 $(1')$ は、解を持たない。

次の連立 1 次方程式を考えてみる。

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad + 3x_4 \quad\quad = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad ③ + ② \times (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad ② + ③ \times (-1)$$

よって、連立 1 次方程式 (2) の解集合は、次の連立 1 次方程式 $(2')$ の解集合と等しい。

$$(2') \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad + 3x_4 \quad = 2 \\ \quad\quad\quad x_3 - x_4 \quad = -1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_5 = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式 (2′) は解を持ち、次のように表される。主成分を含まない列に対応する変数 x_2, x_4 の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 x_1, x_3, x_5 は、一意的に決まる。すなわち、$x_2 = c_1$ と $x_4 = c_2$ とおくと、方程式 (2) の解集合は、次のように表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ -1 + c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

連立 1 次方程式 (1) において、簡約化した拡大係数行列のもっとも右の列は、主成分を含む列なので、解を持たない。連立 1 次方程式 (2) において、簡約化した拡大係数行列のもっとも右の列は、主成分を含まない列なので、解を持つ。

階数の定義より、次の性質 (i)–(iv) に対して、(i) と (ii) は同値、(iii) と (iv) は同値である。

(i) 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ の簡約化のもっとも右の列は、主成分を含む列である。

(ii) $\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A) + 1$

(iii) 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ の簡約化のもっとも右の列は、主成分を含まない列である。

(iv) $\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$

定理 **8.1.** 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とその拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ において、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つ。

(ii) $\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$

証明. 係数行列 A を $m \times n$ 型の行列とする。まず、性質 (ii) を仮定し、性質 (i) を示す。拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列を $(C \mid \mathbf{d})$ とし、その行列の主成分を含む列と主成分を含まない列をそれぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_{s+1}$ とする。このとき、$r + s + 1 = n + 1$ であり、行列 $(C \mid \mathbf{d})$ のもっとも右の列 $\mathbf{d}$ は主成分を含まないので、

$k_{s+1} = n+1$ であることが分かる。さらに、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合と次の連立 1 次方程式の解集合は等しい。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \end{cases}$$

よって、変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}$ の値を任意に定めると、変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は一意的に決まる。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つことが分かる。すなわち、性質 (i) が成り立つ。

逆に、性質 (ii) が満たされていないとき、拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ の簡約化 $(C \mid \mathbf{d})$ のもっとも右の列 $\mathbf{d}$ は、主成分を含むことが分かる。行列 $(C \mid \mathbf{d})$ の主成分を含む列と主成分を含まない列をそれぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_{r+1}$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ とする。このとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合と次の連立 1 次方程式の解集合は等しい。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \\ \ 1 = 0 \end{cases}$$

しかし、この連立 1 次方程式が解を持たないので、性質 (i) も満たされていないことが分かる。よって、定理を示した。 □

補遺 8.2. m 個の方程式からなる n 変数の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とその $m \times (n+1)$ 型の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ において、

$$\operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \operatorname{rank}(A)$$

を仮定し、その階数を r とする。

(i) $r = n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。

(i) $r < n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^n$$

は、$n-r$ 個のパラメーター $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ で表される。

証明. 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列を $(C \mid \mathbf{d})$ とする。

(i) 仮定 $r = n$ より、$C = E_n$ であることが分かる。従って、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合と連立 1 次方程式 $E_n\mathbf{x} = \mathbf{d}$ の解集合は等しいので、ただ一つの解 $\mathbf{x} = \mathbf{d}$ が存在する。

(ii) 行列 C の主成分を含まない列と対応する変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-r}}$ の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は、一意的に決まる。 □

例 8.3. 次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ② + ① \times (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ① + ② \times 2$$

これを見ると、$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A) = 2$ であることが分かる。よって、補遺 8.2 の (ii) より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、$n - r = 4 - 2 = 2$ 個のパラメーター c_1, c_2 で表される。簡約化した拡大係数行列と対応する連立 1 次方程式は、次のように得られる。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = -7 \\ x_2 + x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$$

よって、解集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ は、次のように表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 - 2c_1 - c_2 \\ -5 - c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2)$$

9　可逆行列

今回、正方行列しか考えない。

補題 **9.1.** n 次の正方行列 A において、次の性質は同値である。

(i) $AC = E_n$ を満たす n 次の正方行列 C が存在する。

(ii) 任意の n 次の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持つ。

証明. (i)⇒(ii)：$\mathbf{x} = C\,\mathbf{b}$ とすると、

$$A\mathbf{x} = A(C\,\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = E_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

が成り立つ。

(ii)⇒(i)：n 次列ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、仮定より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1,\ A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は解を持つ。その解を各々 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1,\ \mathbf{x} = \mathbf{c}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ とし、

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$$

とおくと、C は n 次の正方行列で、

$$AC = A\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \cdots & A\mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = E_n$$

となる。 □

補遺 **9.2.** 正方行列 A において、$AC = E_n$ と $AC' = E_n$ を満たす正方行列 C と C' に対して、必ず $C = C'$ である。

証明. $AC = E_n$ を満たす正方行列 C が存在するので、補題 9.1 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つ。よって、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = n$ であることが分かる。従って、前回示した補遺 4 より、任意の列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, ..., $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、各々ただ一つの解 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1$, ..., $\mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ を持つ。よって、$AC = E_n$ を満たす正方行列 $C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ にも、ただ一つが存在する。 □

命題 9.3. 最大階数 n の正方行列 A において、行列 $(A \mid E_n)$ の簡約化を $(E_n \mid C)$ とすると、n 次の正方行列 C は、$AC = E_n$ を満たす。

証明. 確かに、C を $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ と書くと、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ の解集合は等しいので、$AC = E_n$ が成り立つ。 □

定理 9.4. n 次正方行列 A と C において、

$$AC = E_n \quad \Rightarrow \quad CA = E_n$$

証明. まず、A は基本行列である場合を考える。

(1) $A = P_i(s)$ のとき、$C = P_i(1/s)$ なので、$CA = P_i(1/s)P_i(s) = E_n$ ともなる。

(2) $A = T_{i,j}$ のとき、$C = T_{i,j}$ なので、$CA = AC = E_n$ ともなる。

(3) $A = E_{i,j}(s)$ のとき、$C = E_{i,j}(-s)$ なので、$CA = E_{i,j}(-s)E_{i,j}(s) = E_n$ ともなる。

一般的に、$AC = E_n$ を満たす行列 C が存在するとき、A の簡約化は E_n となるので、ある基本行列 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ に対して、

$$C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 A = E_n$$

であることが分かる。従って、$C_i D_i = E_n$ を満たす正方行列 D_i において、

$$A = D_1 D_2 \ldots D_{N-1} D_N$$

と表される。以上の場合から、

$$AC_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 = D_1 D_2 \ldots D_{N-1} D_N C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1 = E_n$$

が成り立つ。よって、$C = C_N C_{N-1} \ldots C_2 C_1$ で、$CA = E_n$ であることが分かる。 □

定義 9.5. 正方行列 A をおいておく。

(1) $AC = E_n = CA$ を満たす正方行列 C は、A の逆行列と呼ばれ、A^{-1} と書かれる。

(2) A を逆行列を持つとき、可逆行列あるいは正則行列と呼ばれる。

定理 9.4 より、$AC = E_n$ を満たす正方行列 C は、必ず $CA = E_n$ とも満たすので、A の逆行列となる。

例 9.6. 命題 9.3 を用いて、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned}
(A \mid E_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-3) \\ ③ + ① \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ \\ ③ + ② \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ ② \times (1/2) \\ ③ \times (-1/3) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) && \begin{array}{l} \\ ② + ③ \times (-1) \\ \\ ① + ② \end{array} \\
(E_3 \mid A^{-1}) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

よって、A の逆行列は、次の行列となる。

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

10　行列式の定義

今回も、正方行列しか考えない。

定義 10.1. 帰納法を用いて、n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式（determinant）は、次のように定義される。まず、$n = 1$ のとき、

$$\det(A) = a_{11}$$

と定義される。それから、$n-1$ 次の正方行列の行列式が定義されているとし、n 次の正方行列の行列式は、次の公式で定義される。

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

ここで、A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次の正方行列である。

注 10.2. 正方行列 A の行列式は、$|A|$ とも書かれる。

例 10.3. $n = 2$ のとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22})$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21})$$

なので、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) \\ &= a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

となる。

例 10.4. $n = 3$ のとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

となる。

例 10.5. 次の行列式を計算してみる。

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) \\ &= -2 \end{aligned}$$

定義 10.1 でおける公式は、「第 1 行で展開された行列式」と呼ばれる。次の定理より、第 i 行で展開された行列式または第 j 列で展開された行列式は、同じ結果を与える。

定理 10.6. n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) （第 i 行で展開された行列式）

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(2) （第 j 列で展開された行列式）

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

注 10.7. 定理 10.6 における符号 $(-1)^{i+j}$ は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

系 10.8. n 次の正方行列 A において、

$$\det({}^{t}A) = \det(A)$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$n = 1$ のとき、系は自明なので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。転置行列の定義より、${}^{t}A$ の (i, j) 成分と A の (j, i) 成分は等しい、$({}^{t}A)_{ij}$ と ${}^{t}(A_{ji})$ は等しいことが分かる。従って、行列式の定義より、転置行列の行列式は、次のように表される。

$$\det({}^{t}A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det({}^{t}(A_{j1}))$$

今、帰納法の仮定より、$\det({}^{t}(A_{j1})) = \det(A_{j1})$ なので、

$$\det({}^{t}A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det(A_{j1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

が得る。右辺は、行列 A の第 1 列で展開された行列式なので、定理 10.6 より、右辺は $\det(A)$ であることが分かる。すなわち、$\det({}^{t}A) = \det(A)$ が成り立つ。帰納法より、任意の自然数 n に対して、系は正しい。 □

例 10.9. 第 2 行で展開し、例 10.5 における行列式を、もう一回計算してみる。

$$\det\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}=2\cdot\det\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}=2\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=2\cdot(8-9)=-2$$

例 10.10. 次の行列 A の行列式 $\det(A)$ を計算してみる。

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&2&2&0\\0&3&1&2\\3&2&0&-3\end{pmatrix}$$

第 3 列には、0 を 2 個あるので、第 3 列で展開して計算する。

$$\begin{aligned}\det(A)&=-2\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&2&2&0\\0&3&1&2\\3&2&0&-3\end{pmatrix}+1\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&2&2&0\\0&3&1&2\\3&2&0&-3\end{pmatrix}\\&=-2\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&3&2\\3&2&-3\end{pmatrix}+1\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&2&0\\3&2&-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

行列式 $\det(A_{23})$ と $\det(A_{33})$ を、それぞれ第 1 列と第 2 行で展開して計算する。

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&3&2\\3&2&-3\end{pmatrix}&=2\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&3&2\\3&2&-3\end{pmatrix}+3\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&3&2\\3&2&-3\end{pmatrix}\\&=2\cdot\det\begin{pmatrix}3&2\\2&-3\end{pmatrix}+3\cdot\det\begin{pmatrix}-1&3\\3&2\end{pmatrix}\\&=2\cdot(-13)+3\cdot(-11)\\&=-59\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} &= -1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1\cdot(-3) + 2\cdot(-15) \\
&= -27
\end{aligned}
$$

よって、

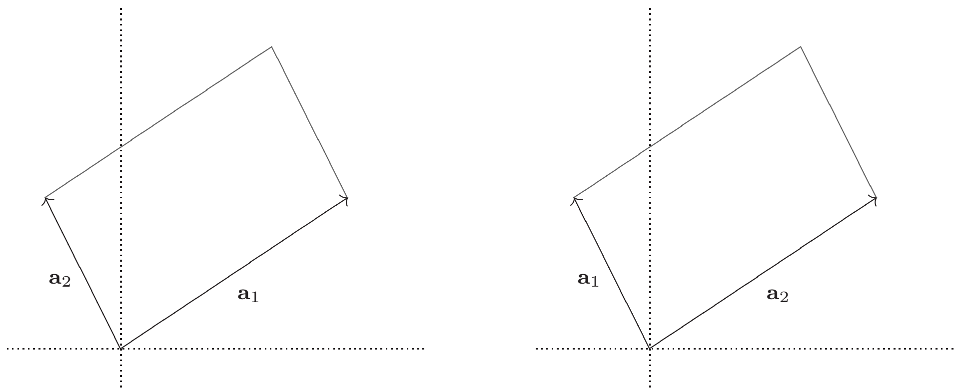
$$\det(A) = -2\cdot(-59) + 1\cdot(-27) = 91$$

が得る。

例 10.11 (行列式の幾何的な記述). $n = 2$ のとき、

$$|\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2)| = \text{ベクトル } \mathbf{a}_1 \text{ と } \mathbf{a}_2 \text{ で定義された平行四辺形の面積}$$

である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2)$ の符号は、次のように与えられる。

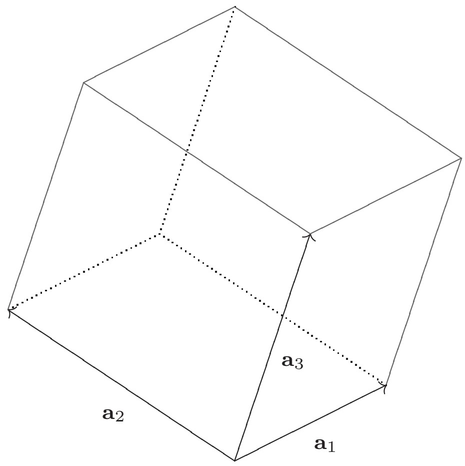


$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2) > 0$　　　　$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2) < 0$

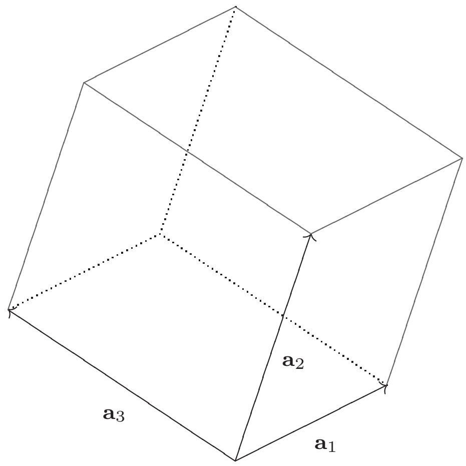
同様に、$n = 3$ のとき、

$$|\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3)| = \text{ベクトル } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ と } \mathbf{a}_3 \text{ で定義された平行六面体の体積}$$

である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3)$ の符号は、次のように与えられる。



$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3) > 0$



$\det(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3) < 0$

命題 **10.12.** 単位行列 E_n の行列式は、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、$n = 1$ のとき、$\det(E_1) = 1$ なので、命題は自明なので、$n - 1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。しかし、定義 10.1 より、

$$\det(E_n) = 1 \cdot \det((E_n)_{11}) = 1 \cdot \det(E_{n-1}) = 1$$

であることが分かる。帰納法より、任意の n に対して、命題は正しい。 □

11　行列式の性質

定理 11.1. 次の性質 (1)—(4) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1 \leqslant j \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(2) 任意の $1 \leqslant j \leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & s\mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = s\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\ \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k \quad \text{ならば} \quad \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = 0\ 」$$

が成立する。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

定理 11.1 を証明する前に、次の補題を示す。

補題 11.2. 定理 11.1 の性質 (1)—(3) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

に対して、次の性質 (i)—(ii) が成り立つ。

(i) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\\&= -\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(ii) 任意の $1 \leqslant j < k \leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ とスカラー s に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\\&= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\\&= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & s\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

証明. 性質 (1) と (3) を用いて (i) は、次の計算から成り立つ。

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\quad + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} \overset{(3)}{=} 0\end{aligned}$$

続いて、性質 (1)—(3) を用いて、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(1)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & s\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(2)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} + s\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\\&\overset{(3)}{=} \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得る。同様に、

$$\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & s\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots\end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

定理 11.1 の証明. 最初に、帰納法を用いて、性質 (1)—(4) を満たす写像の一意性を示す。まず、$n=1$ のとき、

$$\det(a_{11}) = \det(a_{11}\cdot 1) \overset{(2)}{=} a_{11}\cdot\det(1) \overset{(4)}{=} a_{11}\cdot 1 = a_{11}$$

が得るので、$n=r-1$ のときは正しいと仮定し、$n=r$ のときを示せばよい。今、

$$\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{r1}\mathbf{e}_r$$

なので、性質 (1)—(2) から、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} a_{i1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、次の等式 11.3 を示せばよい。

$$(-1)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \det(A_{i1}) \tag{11.3}$$

このために、補題 11.2 を用いて、等式 (11.3) の左辺を次のように表す。

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_r\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{a}_2 - a_{i2}\mathbf{e}_i & \cdots & \mathbf{a}_r - a_{ir}\mathbf{e}_i\end{pmatrix} = \det(\tilde{A}_{i1})$$

ここで、$r-1$ 次の正方行列 B において、$\tilde{B}$ は、次の r 次の正方行列である。

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{i-1,1} & \cdots & b_{i-1,r-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{i,1} & \cdots & b_{i,r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{r-1,1} & \cdots & b_{r-1,r-1} \end{pmatrix}$$

今、$D(B) = (-1)^{i+1}\det(\tilde{B})$ で定義された写像 $D\colon M_{r-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、性質 (1)—(4) を満たすので、帰納法の仮定より、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。よって、等式 (11.3) が成り立つ。これで、性質 (1)—(4) を満たす写像の一意性を示した。

続いて、帰納法を用いて、定義 10.1 で定義された写像 $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、性質 (1)—(4) を満たすことを示す。$n=1$ のときは自明なので、$n=r-1$ のときは正しいと仮定し、$n=r$ のときを示せばよい。定義 10.1 より、r 次の正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{h=1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det(A_{1h})$$

である。r 次の列ベクトル $\mathbf{a}$ において、$\hat{\mathbf{a}}$ を次の $r-1$ 次の列ベクトルとする。

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

今、性質 (1) は、次の計算から成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}(x_j+y_j)\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}x_j\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}y_j\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+1}^{r}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

性質 (2) は、同様に示される。

次に、性質 (3) を示す。まず、$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j+1}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} \\
&= \sum_{h=1}^{j-1}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j}a_{1j}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \hat{\mathbf{a}}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+j+1}a_{1,j+1}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_{j-1} & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{h=j+2}^{n}(-1)^{1+h}a_{1h}\det\begin{pmatrix}\cdots & \hat{\mathbf{a}}_j & \hat{\mathbf{a}}_{j+1} & \cdots\hat{\mathbf{a}}_{h-1} & \hat{\mathbf{a}}_{h+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が消えている。なぜなら、右辺の第 2 行と第 3 行は逆になって、帰納法の仮定より、第 1 行と第 2 行が消えている。今、補題 11.2 の証明は、任意の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$
\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \mathbf{a}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_{j+1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+2} & \cdots\end{pmatrix}
$$

であることを示す。一般的に、ある $1 \leqslant j < k \leqslant n$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{k-j-1}\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得る。特に、$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ のとき、

$$
\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_k & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots\end{pmatrix} = 0
$$

であることが分かる。よって、性質 (3) を示した。

性質 (4) は、命題 10.12 で示したので、定理が成り立つ。 □

定理 11.4. n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) （第 i 行で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

(2) （第 j 列で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

証明. (1) 定理 11.1 の証明と同じように、第 i 行で展開された行列式

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

は、定理 11.1 の性質 (1)—(4) を満たすことが示せる。よって、一意性より、

$$D(A) = \det(A)$$

であることが分かる。

(2) 補題 11.2 の (i) より、$j = 1$ を仮定すればよい。このとき、示したい等式

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

は、定理 11.1 の証明における等式 (11.3) から成り立つ。 □

定理 11.5. n 次の正方行列 A と B に対して、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

である。

証明. $\det(A) \neq 0$ のとき、$D(B) = \det(AB)/\det(A)$ で定義された写像 $D\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、定理 11.1 の性質 (1)—(4) を満たすので、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。

$\det(A) = 0$ のとき、$D(B) = \det(B) - \det(AB)$ で定義された写像 $D\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は、定理 11.1 の性質 (1)—(4) を満たすので、$D(B) = \det(B)$ であることが分かる。 □

注 11.6. 特に、$\det(AB) = \det(BA)$ である。

正方行列 A において、その行基本変形を思い出す。

(1) 行列 $P_i(s)A$ は、行列 A の第 i 行を s 倍（$s \neq 0$）とした行列である。

(2) 行列 $T_{i,j}A$ は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列である。

(3) 行列 $E_{i,j}(s)A$ は、行列 A の第 i 行に第 j 行（$i \neq j$）の s 倍を加えた行列である。

練習問題その１０の問題３で、$\det(P_i(s)) = s$、$\det(T_{i,j}) = -1$ と $\det(E_{i,j}(s)) = 1$ を示したので、定理 12.4 を用いて、次の結果が成り立つ。

定理 11.7. 正方行列 A において、次の性質 (1)—(3) が成り立つ。

(1) $\det(P_i(s)A) = s\det(A)$

(2) $\det(T_{i,j}A) = -\det(A)$

(3) $\det(E_{i,j}(s)A) = \det(A)$

練習問題その１０の問題２で、次の結果を示した。

命題 11.8. n 次の三角行列 A に対して、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

である。

定理 11.7 と命題 11.8 を使うと、行列式の計算が、より簡単に計算できる。

例 11.9. (1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad ① \text{と} ③ \text{を入れ替えた}$$
$$= -3\cdot(-5)\cdot 4 = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -56 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ ② + ① \times (-2) \\ ③ + ① \times (-4) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 28 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ ③ + ② \times (-\frac{7}{3}) \end{matrix}$$
$$= 2\cdot(-24)\cdot 28 = -2^6\cdot 3\cdot 7 = -1344$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-1) \\ ④ + ① \\ ⑤ + ① \times (-1) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ③ \times (-1) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ④ \times (-1) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ② \times (-1) \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{② と ③ を入れ替え}$$

$$= -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) = 2^4 = 16.$$

12　行列式の性質（復習）・クラーメルの公式

行列式とその性質を復習する。n 次の正方行列 A の行列式 $\det(A)$ は、帰納法を用いて次のように定義される。$n=1$ のとき、$\det(A)=a_{11}$ で、$n>1$ のとき、

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) \tag{12.1}$$

である。ただし、A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次の正方行列である。公式 (12.1) は、第 1 行で展開された行列式と呼ばれる。行列の各性質は、次の定理から成り立つ。

定理 12.2 (行列式の基本定理)**.** 次の性質 (1)—(4) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1\leqslant j\leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\\ &=\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(2) 任意の $1\leqslant j\leqslant n$、列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & s\mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=s\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1\leqslant j<k\leqslant n$ と列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\ \mathbf{a}_j=\mathbf{a}_k \quad \text{ならば} \quad \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=0\ 」$$

が成立する。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n)=1$$

である。

例 12.3. 行列 $2A$ は、行列 A の各列を 2 倍とした行列なので、

$$\det(A+A) = \det(2A) = 2^n \det(A)$$

が得る。

例 12.3 より、一般的に、$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ である。一方、定理 12.2 から、次の結果が成り立つ。

定理 **12.4.** n 次の正方行列 A と B に対して、次の性質 (1)–(2) が成り立つ。

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii) $\det({}^tA) = \det(A)$

注 12.5. 定理 12.2 の性質 (1)–(3) と定理 12.4 の性質 (ii) から、次の性質 (1')–(3') が成り立つ。

(1) 任意の $1 \leqslant i \leqslant n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して、

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

である。

(2) 任意の $1 \leqslant i \leqslant n$、行ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$、$\mathbf{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ s\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = s\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

である。

(3) 任意の $1 \leqslant i < j \leqslant n$ と行ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対して、

$$「\ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j \qquad \text{ならば} \qquad \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0\ 」$$

が成立する。

行列式の基本定理 12.2 から、次の便利な結果も成り立つ。

定理 **12.6.** n 次の正方行列 A をおいておく。

(1) （第 i 行で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

(2) （第 j 列で展開された行列式） $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

ここで、A_{ij} は、行列 A から第 i 行と第 j 列を除いて $n-1$ 正方行列である。

例 12.7 (三角行列の行列式). 次の性質を満たす正方行列 A は、上三角行列と呼ばれる。

$$i > j \qquad \text{ならば} \qquad a_{ij} = 0$$

転置行列 ${}^tA$ は上三角行列である行列 A は、下三角行列と呼ばれ、A 及び ${}^tA$ は上三角行列である行列 A は、三角行列と呼ばれる。定理 12.6 より、三角行列 A に対して、行列式 $\det(A)$ は対角成分の積と等しいことが成り立つ。すなわち、A は n 次の三角行列のとき、

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

である。

次の便利な定理も、行列式の基本定理から成り立つ。

定理 12.8. 正方行列 A において、次の性質 (1)—(3) が成り立つ。

(1) 行列 B は、行列 A の第 i 行を s 倍した行列とすると、

$$\det(B) = s\det(A)$$

である。

(2) 行列 B は、行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列とすると、

$$\det(B) = -\det(A)$$

である。

(3) 行列 B は、行列 A の第 i 行に第 j 行（$i \neq j$）の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(B) = \det(A)$$

である。

同様に、次の性質 $(1')$—$(3')$ が成り立つ。

(1') 行列 C は、行列 A の第 j 列を s 倍した行列とすると、

$$\det(C) = s\det(A)$$

である。

(2') 行列 C は、行列 A の第 j 行と第 k 列を入れ替えた行列とすると、

$$\det(C) = -\det(A)$$

である。

(3') 行列 C は、行列 A の第 j 列に第 k 列（$j \neq k$）の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(C) = \det(A)$$

である。

定理 12.8 と例 12.7 を用いて、行列式を簡単に計算することがよくある。

例 12.9. 次の行列式を計算してみる。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= - \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と第 5 行を入れ替えた} \\
&= + \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行と第 4 行を入れ替えた} \\
&= - \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列と第 4 列を入れ替えた} \\
&= -8 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 3 \\
&= 2^6 \cdot 3 = 192
\end{aligned}
$$

定理 12.8 を用いて、次の定理を示す。

定理 12.10. n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\mathrm{rank}(A) = n$

(ii) $\det(A) \neq 0$

証明. 行列 A の簡約化を B とする。定理 12.8 より、$\det(A) \neq 0$ と $\det(B) \neq 0$ は同値であることが分かる。簡約化 B は三角行列なので、$\det(B) \neq 0$ と $B = E_n$ は同値である。また、階数の定義より、$B = E_n$ と $\mathrm{rank}(A) = n$ は同値なので、定理を証明した。 □

定理 12.11 (クラーメルの公式). n 次の正則行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

において、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}$$

証明. 列ベクトル $\mathbf{x}$ が連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることと列ベクトル $\mathbf{b}$ が次 1 次結合と表されることは同値である。

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

従って、定理 12.2 の性質 (1)–(2) より、次の等式が得る。

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

さらに、定理 12.2 の性質 (3) より、$j \neq i$ のとき、右辺の第 j 項はゼロなので、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = x_i \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{a}_i & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

例 12.12. クレーメルの公式を用いて、次の連立 1 次方程式を問いでみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

まず、定理 12.8 と例 12.7 より、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

が得る。同様に、次の行列式を計算する。

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 7 = 7$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 = 9$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 = 9$$

よって、クレーメルの公式より、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 5/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

が得る。ただし、同じ答えがより簡単に掃き出し法で得る。